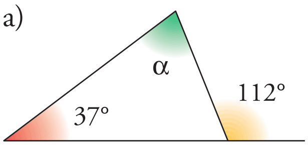
PÁGINA 196

PRACTICA

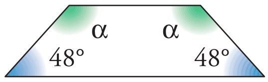
Ángulos

1 Halla el valor del ángulo α en cada uno de estos casos:

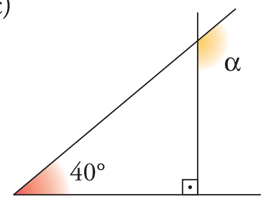
a)



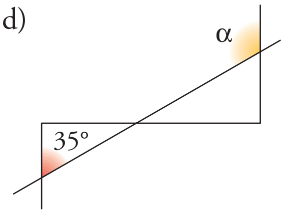
b)



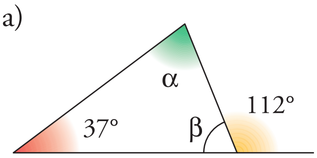
c)



d)



a)

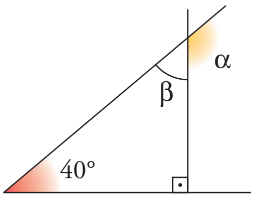


$\beta = 180° - 112° = 68°$

$\alpha = 180° - 37° - 68° = 75°$

b) $2\alpha = 360° - 48° \cdot 2 \rightarrow \alpha = 132°$

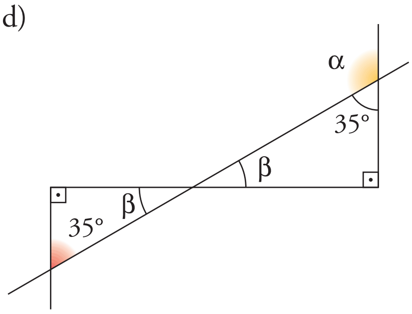
c)



$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$

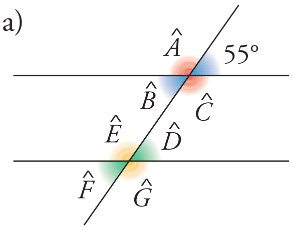
$\alpha = 180° - 50° = 130°$

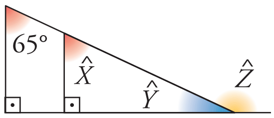
d)



$\alpha = 180° - 35° = 145°$

2 ☐☐☐ **Calcula la medida de los ángulos desconocidos.**

a) 

b) 

a) $\hat{B} = \hat{D} = \hat{F} = 55°$

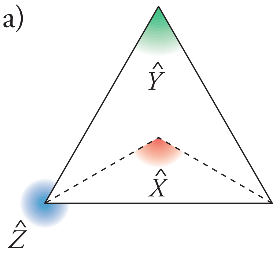
$\hat{C} = \hat{A} = \hat{G} = \hat{E} = 180° - 55° = 125°$

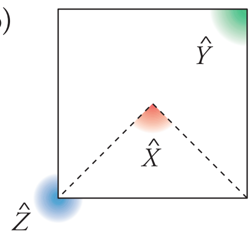
b) $\hat{X} = 65°$

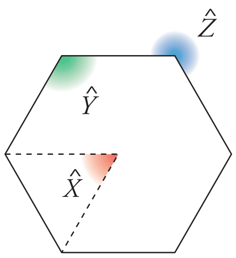
$\hat{Y} = 180° - 90° - 65° = 25°$

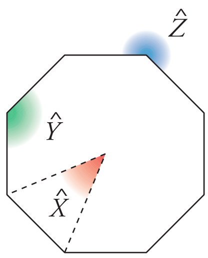
$\hat{Z} = 180° - 25° = 155°$

4 ☐☐☐ **Calcula los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

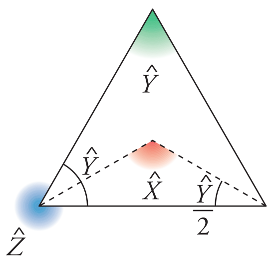
a) 

b) 

c) 

d) 

a) $\hat{X}$ es un ángulo central del triángulo equilátero, por lo que $\hat{X} = \dfrac{360°}{3} = 120°$.



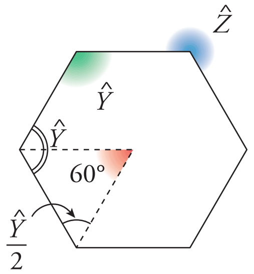
$$\frac{\hat{Y}}{2} + \frac{\hat{Y}}{2} + \hat{X} = 180°$$

$$\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 60°$$

$$\hat{Z} = 360° - 60° = 300°$$

b) $\hat{X} = \dfrac{360°}{4} = 90°$; $\hat{Y} = 90°$; $\hat{Z} = 360° - 90° = 270°$

c) $\hat{X} = \dfrac{360°}{6} = 60°$



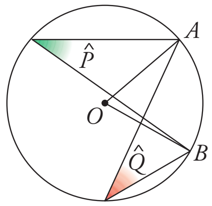
Como el lado y el radio de un hexágono son iguales, el triángulo es equilátero.

Por tanto, $\dfrac{\hat{Y}}{2} = 60° \rightarrow \hat{Y} = 120°$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 240°$

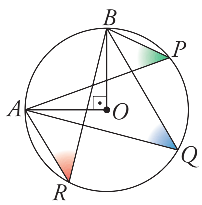
d) $\hat{X} = \dfrac{360°}{8} = 45°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 135°$; $\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

5 □□□ **Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\widehat{AOB} = 70°$.**



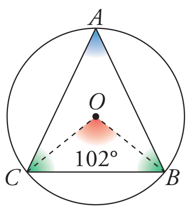
$\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

6 □□□ **¿Cuánto miden los ángulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ y $\hat{R}$ si $\widehat{AOB}$ es un ángulo recto?**



$\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

7 □□□ **El triángulo ABC es isósceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$. ¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?**



$\hat{A} = \dfrac{102°}{2} = 51°$; $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180° - 51°}{2} = 64°\ 30'$

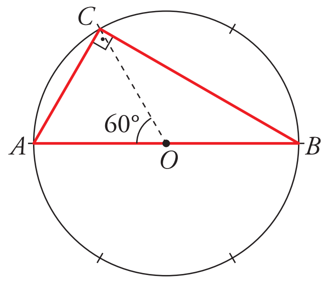
8 **Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices A y B sean extremos de un diámetro y el arco $\widehat{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**

$\widehat{AOC} = \dfrac{180°}{3} = 60°$

$\widehat{ACB} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

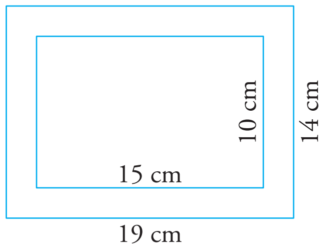
$\widehat{ABC} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$\widehat{CAB} = 180° - 90° - 30° = 60°$



Semejanza

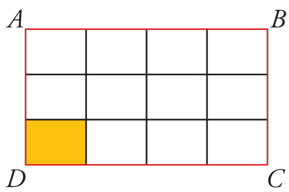
9 **Una fotografía de 15 cm de ancho y 10 cm de alto tiene alrededor un marco de 2 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**



$\dfrac{15}{19} \neq \dfrac{10}{14} \rightarrow$ No son semejantes. (Sus lados no son proporcionales).

PÁGINA 197

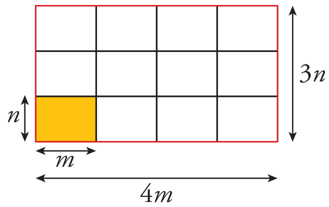
10 **Hemos dividido en cuatro partes iguales el lado mayor del rectángulo $ABCD$ y en tres partes iguales el lado menor.**



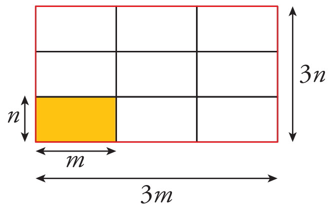
a) ¿Es semejante cada uno de los doce rectángulos obtenidos con el inicial?

b) Si dividimos los dos lados en tres partes iguales, ¿obtendríamos rectángulos semejantes?

a) $\frac{4m}{m} \neq \frac{3n}{n}$ $\rightarrow$ No son semejantes los rectángulos $n \times m$ y $3n \times 4m$.



b) $\frac{3m}{m} = \frac{3n}{n}$ $\rightarrow$ Sí son semejantes. La razón de semejanza sería 3.



11 **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es de 3,5 cm.**

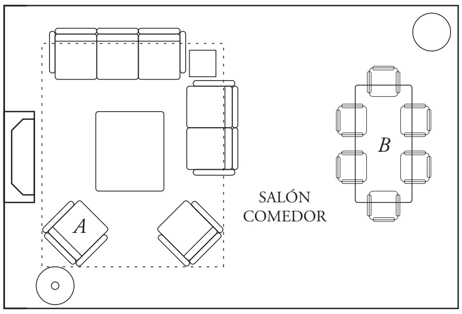
a) ¿Cuál es la distancia real antre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades cuya distancia real es 250 km?

a) Distancia real = 3,5 · 1 500 000 = 5 250 000 cm = 52,5 km

b) Distancia en el mapa = 250 : 1 500 000 ≈ 0,0001667 km = 16,67 cm

12 **En una oficina de venta de pisos han hecho este plano a escala 1:50:**



a) Calcula las dimensiones reales del salón y halla su área.

b) Halla las dimensiones de la mesa B y del sillón A. ¿Te parecen razonables?

¿Es posible que los vendedores hayan dibujado los muebles para dar la sensación de que la habitación es más grande de lo que realmente es?

a) En el dibujo el salón mide, aproximadamente, 6 cm × 4 cm. Por tanto, en la realidad medirá 6 · 50 cm × 4 · 50 cm = 300 cm × 200 cm = 3 m × 2 m.

El área del salón real será $A = 3 \cdot 2 = 6$ m^2

b) Las dimensiones de la mesa B en el dibujo son 0,8 cm × 1,6 cm. En la realidad: 0,8 · 50 cm × 1,6 · 50 cm = 40 cm × 80 cm.

Las dimensiones del sillón A en el dibjo son 0,7 cm × 0,7 cm. En la realidad: 0,7 · 50 cm × 0,7 · 50 cm = 35 cm × 35 cm.

Las dimensiones de la mesa y del sillón son absurdamente pequeñas. Los vendedores, sin duda, han dibujado los muebles para dar la sensación de que la habitación es más grande de lo que realmente es.

13 Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y su razón de semejanza es 1,2. Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

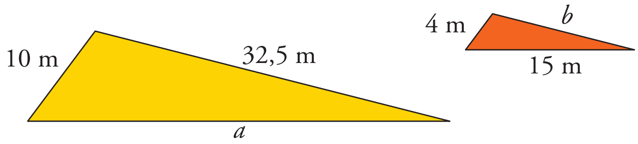
$$\overline{AB} = 16 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = 25 \text{ cm} \qquad \overline{AC} = 39 \text{ cm}$$

$\overline{A'B'} = 1,2 \cdot 16 = 19,2$ cm

$\overline{B'C'} = 1,2 \cdot 25 = 30$ cm

$\overline{A'C'} = 1,2 \cdot 39 = 46,8$ cm

14 Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

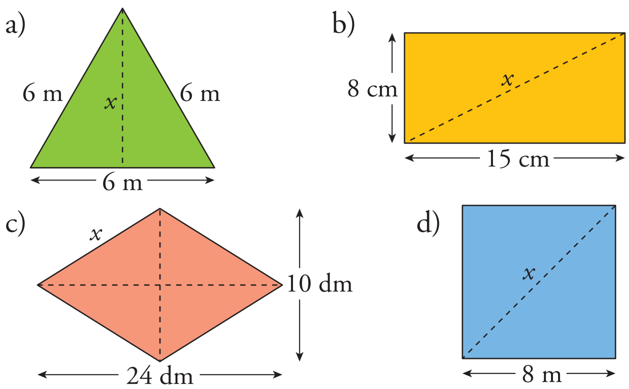
$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32,5}{b}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \;\rightarrow\; 4a = 150 \;\rightarrow\; a = 37,5 \text{ m}$$

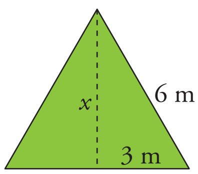
$$\frac{10}{4} = \frac{32,5}{b} \;\rightarrow\; 10b = 130 \;\rightarrow\; b = 13 \text{ m}$$

Teorema de Pitágoras

15 Calcula el valor de x en estos polígonos:

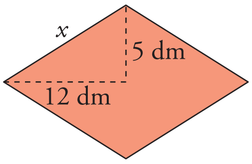


a)



$$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ m}$$

b) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm c)

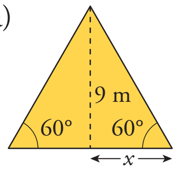


$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ dm

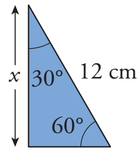
d) $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$ m

16 **Calcula x en cada caso:**

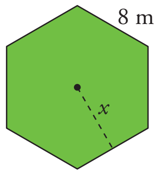
a)



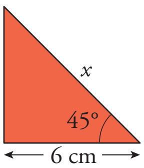
b)



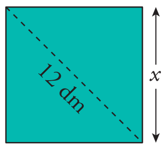
c)



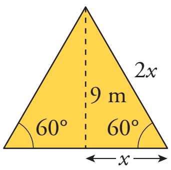
d)



e)



a)



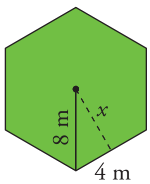
Como dos de sus ángulos miden 60°, el otro también medirá 60°. Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide x, el lado entero medirá $2x$.

$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow 3x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

b) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni x, es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm

c)



Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$ m

d) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro tendrá que medir 45° también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así:

$x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ cm

e) $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow x = \sqrt{72} \approx 8{,}5$ dm

17 **La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro y su área.**

$l \rightarrow$ lado que falta

$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1\,225} = 35$ cm

Perímetro = $2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94$ cm

Área = $35 \cdot 12 = 420$ cm^2

18 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 9 cm y 12 cm. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 14,4 cm, y la hipotenusa, 15 cm.**
¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?

En el primer triángulo rectángulo, la hipotenusa mide:

$h = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm. Por tanto:

Perímetro = $15 + 9 + 12 = 36$ cm

En el otro triángulo rectángulo, el cateto que falta mide:

$x = \sqrt{15^2 - 14{,}4^2} = \sqrt{17{,}64} = 4{,}2$ cm. Por tanto:

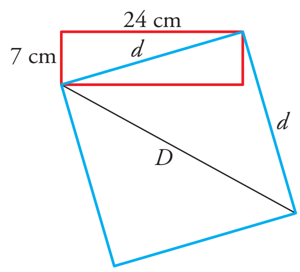
Perímetro = $4{,}2 + 15 + 14{,}4 = 33{,}6$ cm

El primer triángulo tiene mayor perímetro.

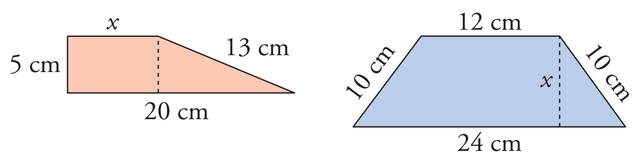
19 **La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.**

$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

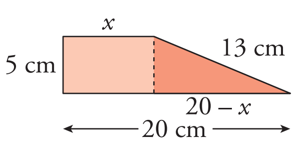
$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1\,250} \approx 35{,}36$ cm



20 **Calcula x en estos trapecios y halla su área:**



a)



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

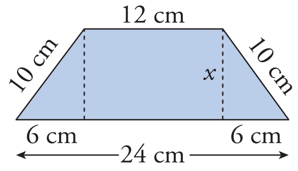
$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 32$ cm, $x = 8$ cm

La solución $x = 32$ cm no tiene sentido, ya que $x < 20$. Por tanto, $x = 8$ cm. Así:

$$A = \frac{(20 + 8) \cdot 5}{2} = 70 \text{ cm}^2$$

b)



$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

Así: $A = \dfrac{(24 + 12) \cdot 8}{2} = 144 \text{ cm}^2$

21 **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 11 m, 13 m, 20 m. **b) 20 m, 21 m, 29 m.**

c) 25 m, 29 m, 36 m. **d) 7 m, 24 m, 25 m.**

a) $11^2 + 13^2 = 290$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 11^2 + 13^2$, el triángulo es obtusángulo.

b) $20^2 + 21^2 = 841$; $29^2 = 841$

Como $29^2 = 20^2 + 21^2$, el triángulo es rectángulo.

c) $25^2 + 29^2 = 1\,466$; $36^2 = 1\,296$

Como $36^2 < 25^2 + 29^2$, el triángulo es acutángulo.

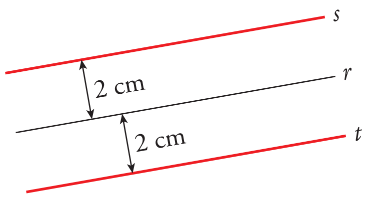
d) $7^2 + 24^2 = 625$; $25^2 = 625$

Como $25^2 = 7^2 + 24^2$, el triángulo es rectángulo.

PÁGINA 198

Lugares geométricos y cónicas

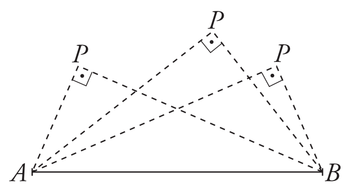
22 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta r es de 2 cm? Dibújalo.**



Las rectas s y t son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta r es de 2 cm.

Las rectas s y t son paralelas a r, cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de r.

23 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?**



La circunferencia de centro el punto medio de $\overline{AB}$ (exceptuando los puntos A y B) es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto.

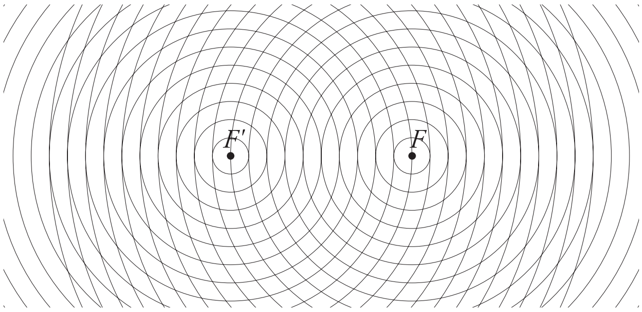
24 ■□□ **Define como lugar geométrico una circunferencia de centro O y radio 5 cm.**

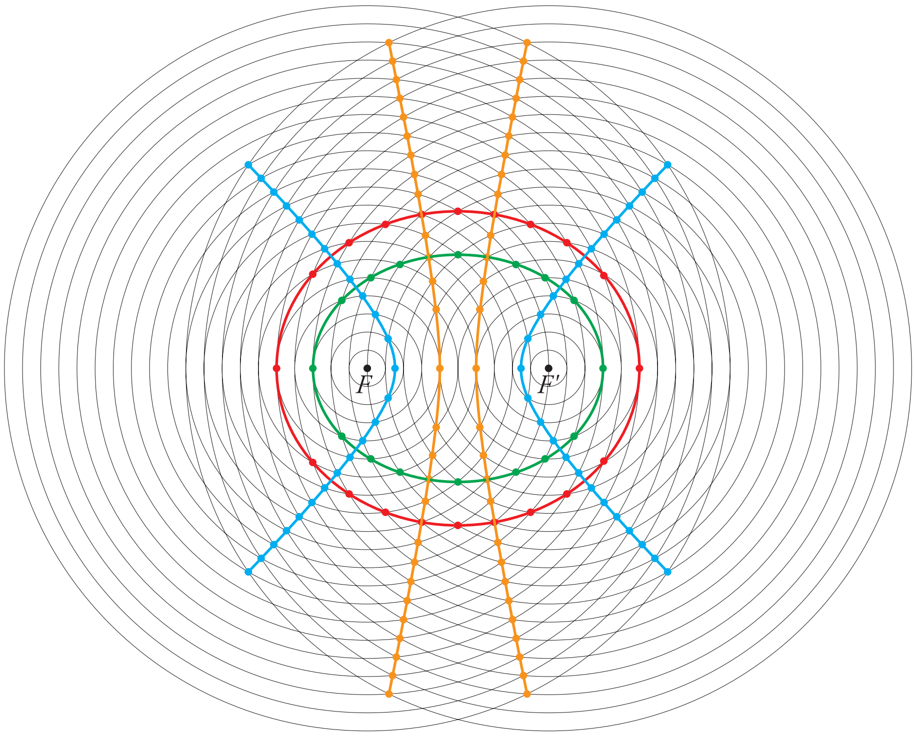
La circunferencia de centro O y radio 5 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es 5 cm: $\overline{OP} = 5$ cm

25 ■■□ **Utiliza una trama como la siguiente (puedes sacarla del CD-ROM) para dibujar:**

a) Dos elipses de focos F y F' y constantes $d = 16$ y $d = 20$, respectivamente (tomamos como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).

b) Dos hipérbolas de focos F y F' y constantes $d = 2$ y $d = 7$.

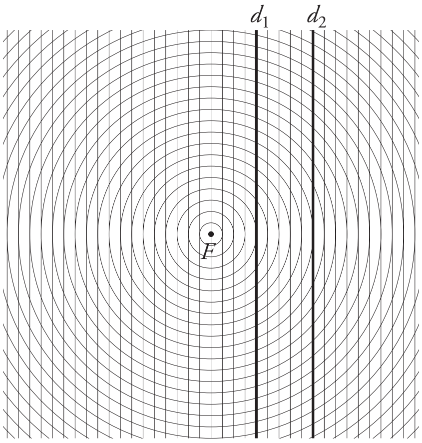


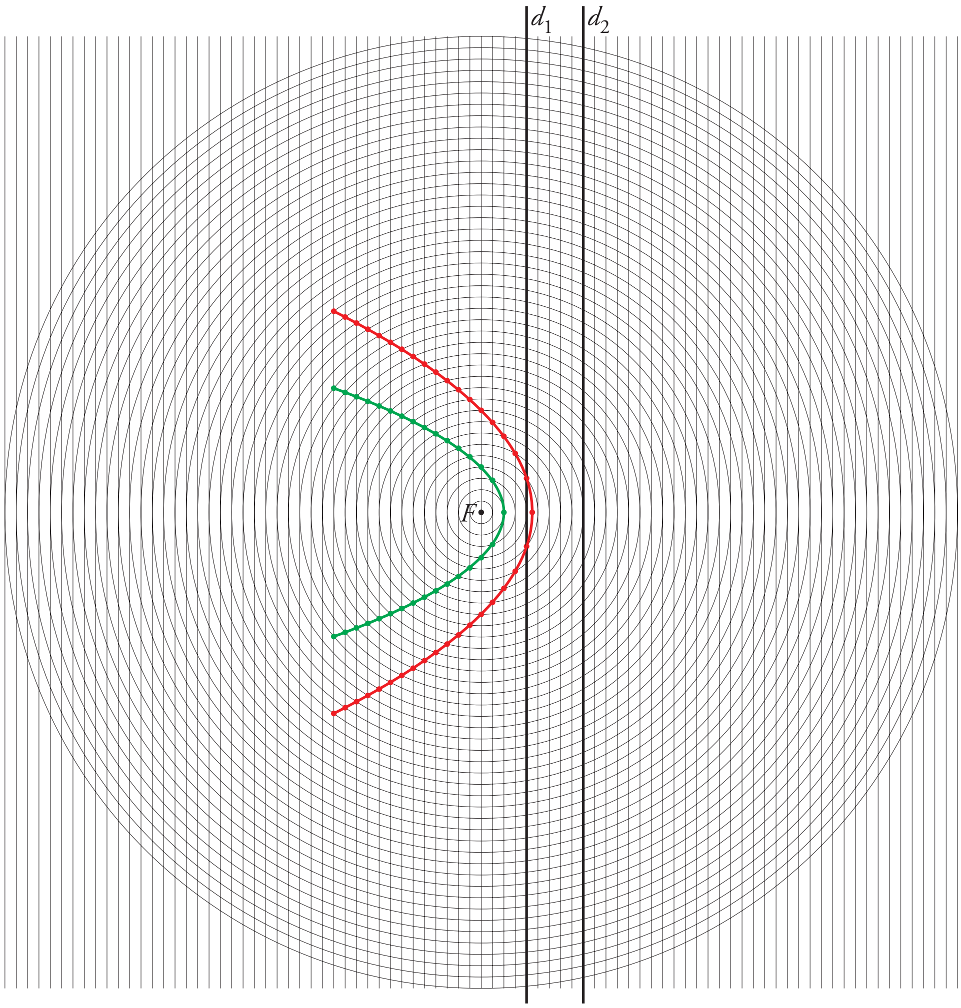


26 Usa una trama como la siguiente (puedes sacarla del CD-ROM) para dibujar:

a) Una parábola de foco F y directriz d_1.

b) Una parábola de foco F y directriz d_2.

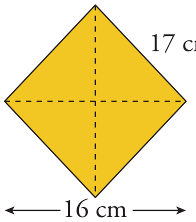




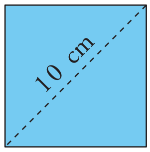
Áreas

27 Halla el área de las figuras coloreadas.

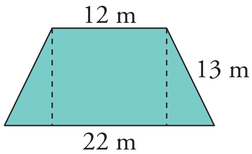
a)



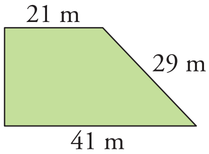
b)



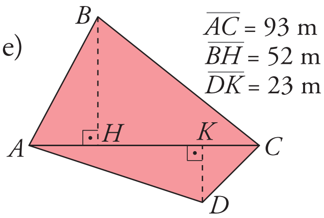
c)



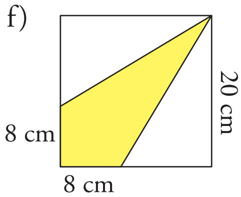
d)



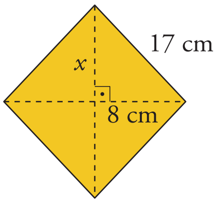
e)



f)



a)

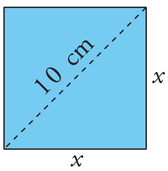


$x = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$

$d = 15 \cdot 2 = 30$ cm

$A = \dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$

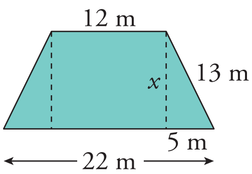
b)



$x^2 + x^2 = 10^2 \;\rightarrow\; 2x^2 = 100 \;\rightarrow\; x = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm

$A = 7{,}1^2 = 50 \text{ cm}^2$

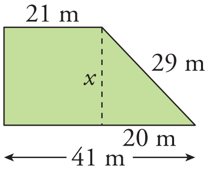
c)



$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

$A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 12 = 192 \text{ m}^2$

d)



$x = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ m

$A = \dfrac{21 + 41}{2} \cdot 21 = 651 \text{ m}^2$

e) $A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069{,}5 \text{ m}^2$

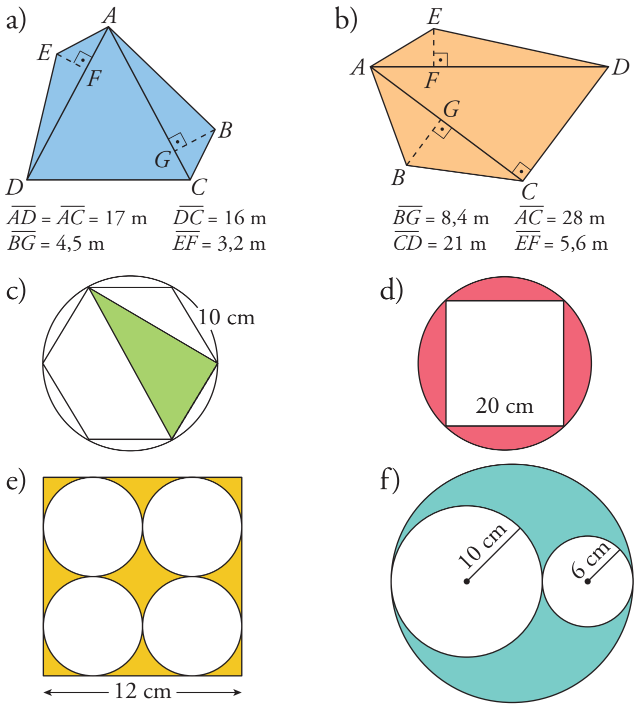
$A_{\text{TOTAL}} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5 \text{ m}^2$

f) $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120 \text{ cm}^2$

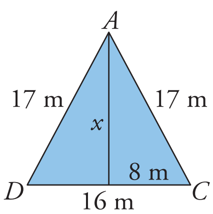
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160 \text{ cm}^2$

28 **Calcula el área de las figuras coloreadas.**



a) $A_{\text{TRIÁNGULO } ADE} = \dfrac{17 \cdot 3{,}2}{2} = 27{,}2 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACB} = \dfrac{17 \cdot 4{,}5}{2} = 38{,}25 \text{ m}^2$



$x = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ADC} = \dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 27{,}2 + 38{,}25 + 120 = 185{,}45 \text{ m}^2$

b) $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{1\,225} = 35$ m

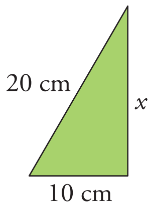
$A_{\text{TRIÁNGULO } ADE} = \dfrac{35 \cdot 5{,}6}{2} = 98 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{21 \cdot 28}{2} = 294 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACB} = \dfrac{28 \cdot 8{,}4}{2} = 117{,}6 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 98 + 294 + 117{,}6 = 509{,}6 \text{ m}^2$

c) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:



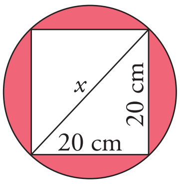
hipotenusa = $2 \cdot 10 = 20$ cm

un cateto = 10 cm

$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}32$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{10 \cdot 17{,}32}{2} = 86{,}6 \text{ cm}^2$

d)



$x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28{,}28$ cm

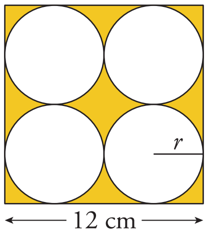
radio $= \dfrac{x}{2} = 14{,}14$ cm

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14{,}14^2 \approx 628{,}13 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 628{,}13 - 400 = 228{,}13 \text{ cm}^2$

e)



$r = \dfrac{12}{4} = 3$ cm

$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28{,}27 = 30{,}92 \text{ cm}^2$

f) El diámetro del círculo grande mide $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$ cm.

Su radio medirá $\dfrac{32}{2} = 16$ cm.

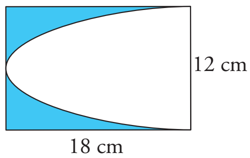
$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804{,}25 \text{ cm}^2$

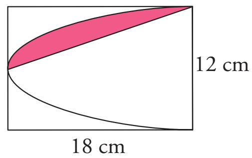
$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADAA}} = 804{,}25 - 314{,}16 - 113{,}1 \approx 377 \text{ cm}^2$

29 Halla el área de la zona coloreada en cada figura:

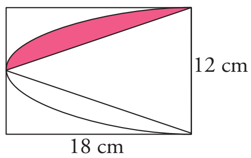
a) 

b) 

a) Área del segmento de parábola: $A = \dfrac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

Área de la zona coloreada $= 18 \cdot 12 - 144 = 72 \text{ cm}^2$

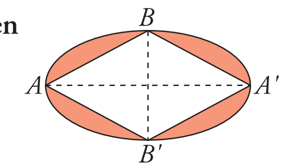
b) Área de la zona coloreada $= \dfrac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$



$= \dfrac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18 \text{ cm}^2$

PÁGINA 199

30 **Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.**



$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot \dfrac{16}{2} \approx 377 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

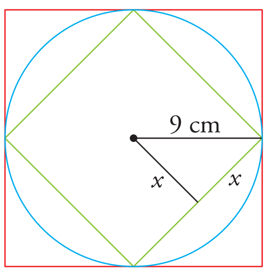
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 377 - 240 = 137 \text{ cm}^2$

31 **En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja los cuadrados circunscrito e inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).**

$56{,}52 = 2 \cdot \pi \cdot r \;\rightarrow\; r = \dfrac{56{,}52}{2\pi} = 9 \text{ cm}$

El radio de la circunferencia es 9 cm

$9^2 = x^2 + x^2 \;\rightarrow\; 2x^2 = 81 \;\rightarrow\; x = \sqrt{40{,}5} \approx 6{,}364 \text{ cm.}$



Lado cuadrado grande $= 2 \cdot 9 = 18$ cm

$A_{\text{CUADRADO GRANDE}} = 18 \cdot 18 = 324 \text{ cm}^2$

Lado cuadrado pequeño $= 12{,}73$ cm

$A_{\text{CUADRADO PEQUEÑO}} = 12{,}73 \cdot 12{,}73 = 162{,}1 \text{ cm}^2$

$P_{\text{CUADRADO GRANDE}} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}$

$P_{\text{CUADRADO PEQUEÑO}} = 4 \cdot 12{,}73 = 50{,}92 \text{ cm}$

32 **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 65°** **d) 140°**

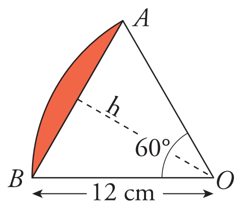
a) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 90° \approx 176{,}71 \text{ cm}^2$ b) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 120° \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 65° \approx 127{,}63 \text{ cm}^2$ d) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 140° \approx 274{,}89 \text{ cm}^2$

33 Ejercicio resuelto

Calcular el área de un segmento circular de 60° de amplitud en un círculo de 12 cm de radio.

El área del segmento circular se halla restando, del área del sector, el área del triángulo.



- Área del sector: $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60°}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$
- Área del triángulo. Observa que es equilátero, ya que $\overline{OA} = \overline{OB}$ y $\widehat{AOB} = 60°$.

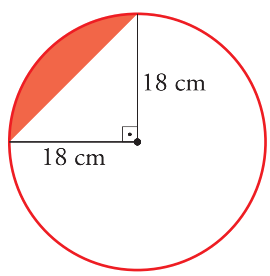
  Altura: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

  Área: $\dfrac{12 \cdot 10{,}41}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$
- Calcula el área del segmento circular.

  El área del segmento circular es:

$$A = A_{\text{SECTOR}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = 75{,}4 - 62{,}4 = 3 \text{ cm}^2$$

34 **Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.**

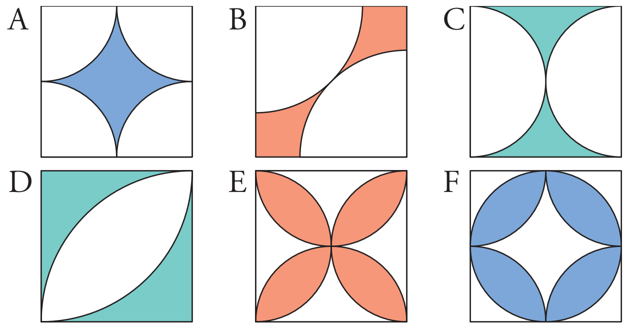


$A_{\text{SECTOR}} = \dfrac{\pi \cdot 18^2}{360°} \cdot 90° \approx 254{,}47 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

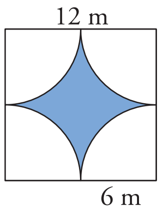
$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254{,}47 - 162 = 92{,}47 \text{ cm}^2$

35 ■■□ **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 12 m de lado:**



$A_{\text{CUADRADO}} = 12^2 = 144 \text{ m}^2$

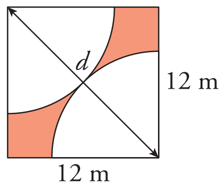
A



$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 \approx \frac{113,1}{4} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot \frac{113,1}{4} = 30,9 \text{ m}^2$$

B



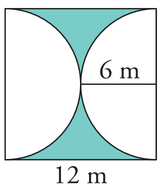
$$d = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16,97 \text{ m}$$

$$\text{radio de circunferencias} = \frac{d}{2} \approx 8,49 \text{ m}$$

$$A_{1/4 \text{ CIRCUNFERENCIA}} = \frac{\pi \cdot 8,49^2}{4} = 56,61 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2 \cdot 56,61 = 36,78 \text{ m}^2$$

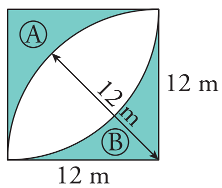
C



$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \approx \frac{113,1}{2} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 2A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

D

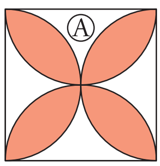


$$A_{1/4 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} \approx 113,1 \text{ m}^2$$

$$A_{Ⓐ} = A_{Ⓑ} = 144 - 113,1 = 30,9 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 30,9 = 61,8 \text{ m}^2$$

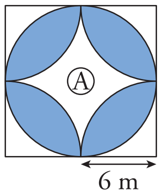
E



Área de parte coloreada en apartado c) $= 30,9 \text{ m}^2$

$$A_{Ⓐ} = \frac{30,9}{2} = 15,45 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 15,45 = 82,2 \text{ m}^2$$

f) 

Área parte coloreada en apartado a) = 30,9 m^2

$A_{Ⓐ} = 30{,}9$ m^2

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}1$ m^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 113{,}1 - 30{,}9 = 82{,}2$ m^2

PIENSA Y RESUELVE

36 **Se llama triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área enteros ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área enteros). El nombre de triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.**

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de los que conocemos sus lados:

a) 13 cm, 14 cm, 15 cm (comprueba que es 84 cm^2).

b) 5 m, 5 m, 6 m.

c) 13 dm, 20 dm, 21 dm.

d) 25 cm, 34 cm, 39 cm.

Fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo y s es la mitad de su perímetro.

a) $s = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ cm

$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7\,056} = 84$ cm^2

b) $s = \dfrac{5 + 5 + 6}{2} = 8$ m

$A = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{144} = 12$ m^2

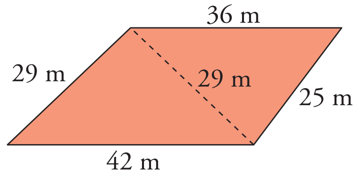
c) $s = \dfrac{13 + 20 + 21}{2} = 27$ dm

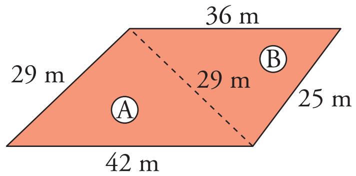
$A = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{15\,876} = 126$ dm^2

d) $s = \dfrac{25 + 34 + 39}{2} = 49$ cm

$A = \sqrt{49(49-25)(49-34)(49-39)} = \sqrt{176\,400} = 420$ cm^2

37 **Cierta finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**





Aplicamos la fórmula de Herón:

$$s_{Ⓐ} = \frac{29 + 29 + 42}{2} = 50 \text{ m}$$

$$A_{Ⓐ} = \sqrt{50(50-29)^2(50-42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$$

$$s_{Ⓑ} = \frac{29 + 36 + 25}{2} = 45 \text{ m}$$

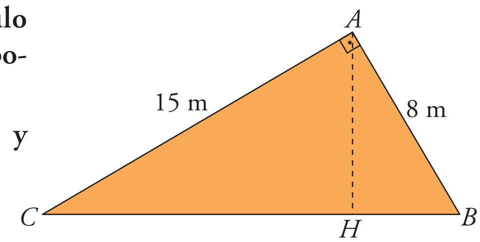
$$A_{Ⓑ} = \sqrt{45(45-29)(45-36)(45-25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{FINCA}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$$

38 **El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, y AH es la altura sobre la hipotenusa.**

a) Demuestra que los triángulos ABH y AHC son semejantes.

b) Calcula las longitudes $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$.



a) Los triángulos ABC y ABH son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{B}$ en común y son rectángulos.

Los triángulos ABC y AHC son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{C}$ en común y son rectángulos.

Por tanto, los triángulos ABH y AHC también son semejantes.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ m}$$

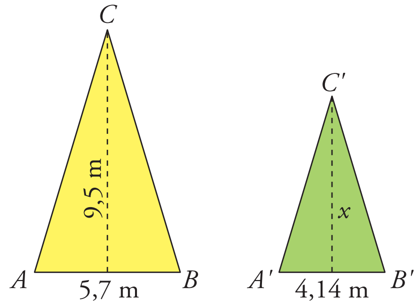
Por ser $\widehat{AHB}$ semejante a $\widehat{CAB}$:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \rightarrow \overline{HB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CB}} = \frac{8^2}{17} = \frac{64}{17} \approx 3{,}76 \text{ cm}$$

Por ser $\widehat{AHC}$ semejante a $\widehat{BAC}$:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{17} = \frac{225}{17} \approx 13{,}24 \text{ cm}$$

39 **En un triángulo ABC, la base AB mide 5,7 m y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante a ABC en el que $\overline{A'B'}$ = 4,14 m?**



Por semejanza de triángulos:

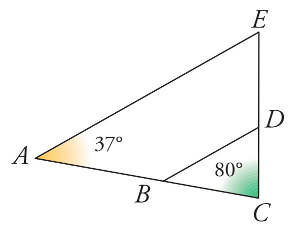
$$\frac{5{,}7}{4{,}14} = \frac{9{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{9{,}5 \cdot 4{,}14}{5{,}7} = 6{,}9 \text{ m}$$

$$A_{A'B'C'} = \frac{4{,}14 \cdot 6{,}9}{2} \approx 14{,}28 \text{ m}^2$$

40 **Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm, $\overline{BD}$ = 6,4 cm, $\overline{AE}$ = 18 cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



Por semejanza de triángulos:

a) $\dfrac{18}{6{,}4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6{,}4}{18} \approx 3{,}9$ cm

$\dfrac{18}{6{,}4} = \dfrac{15}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot 6{,}4}{18} \approx 5{,}33$ cm

b) $\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

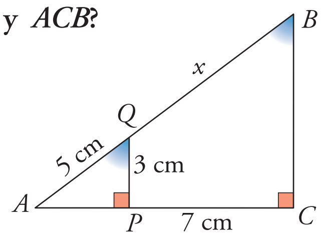
$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

PÁGINA 200

41 **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) Son semejantes porque tienen el ángulo $\hat{A}$ en común y son los dos rectángulos. Como tienen dos ángulos iguales, el tercero también es igual.

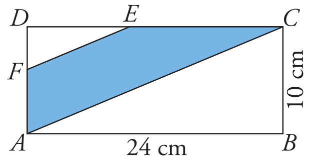
b) Calculamos $\overline{AP}$ por Pitágoras:

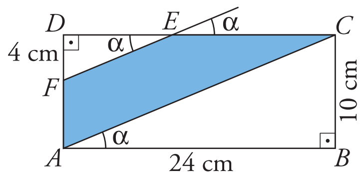
$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \rightarrow \frac{7+4}{4} = \frac{5+x}{5} \rightarrow x = 8{,}75 \text{ cm}$$

42 **Si $\overline{DF} = 4$ cm, ¿cuál es el área y el perímetro del trapecio *EFAC*?**





Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AC} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$ cm

Vemos que el ángulo $\widehat{BAC}$ es igual al ángulo $\widehat{DEF}$, y como los triángulos *ABC* y *DEF* son rectángulos, entonces son semejantes.

Por semejanza de triángulos, podemos decir que:

$$\frac{4}{10} = \frac{\overline{DE}}{24} \rightarrow \overline{DE} = 9{,}6 \text{ cm}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{FE} = \sqrt{4^2 + 9{,}6^2} = \sqrt{108{,}16} = 10{,}4$ cm

Por tanto:

$\overline{FA} = 10 - 4 = 6$ cm

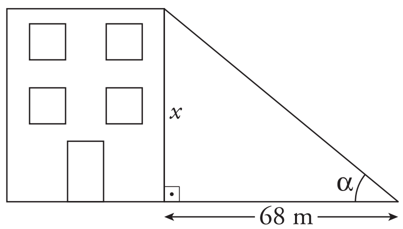
$\overline{EC} = 24 - 9{,}6 = 14{,}4$ cm

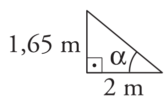
Entonces:

$$A_{\text{TRAPECIO}} = 24 \cdot 10 - \frac{24 \cdot 10}{2} - \frac{4 \cdot 9{,}6}{2} = 100{,}8 \text{ cm}^2$$

$$P_{\text{TRAPECIO}} = 26 + 14{,}4 + 10{,}4 + 6 = 56{,}8 \text{ cm}$$

43 **¿Cuál es la altura de una casa que proyecta una sombra de 68 m, al mismo tiempo que una persona de 1,65 m de altura proyecta una sombra de 2 m?**

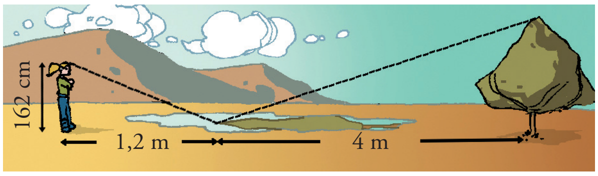


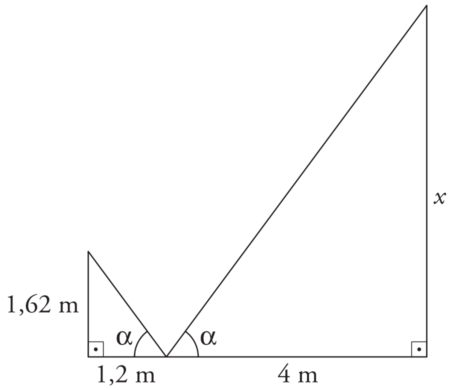


Los dos triángulos son semejantes, por tanto:

$$\frac{68}{2} = \frac{x}{1{,}65} \rightarrow x = 56{,}1 \text{ m}$$

44 □□□ **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**

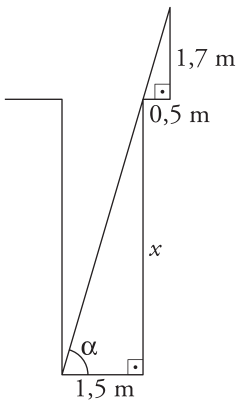




Por semejanza de triángulos:

$$\frac{4}{1,2} = \frac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4 \text{ m}$$

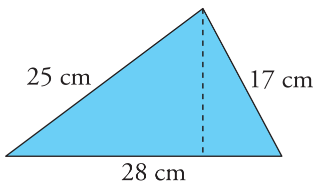
45 □□□ **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

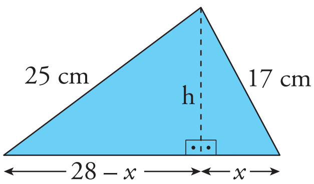


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{1,5}{0,5} = \frac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1 \text{ m}$$

46 □□□ **Calcula la altura del triángulo siguiente, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área:**

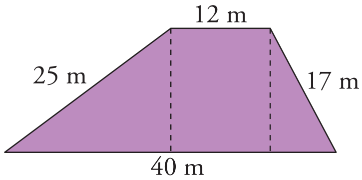


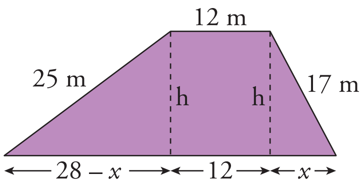


$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28 - x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\}$$

$$A = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$$

47 ■□□ **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**

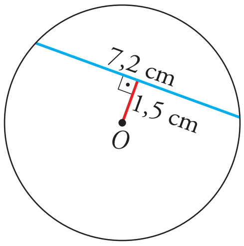




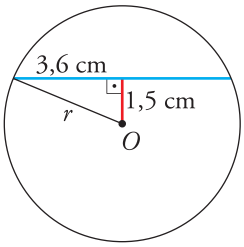
$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

48 ■□□ **a) Calcula el radio de esta circunferencia:**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

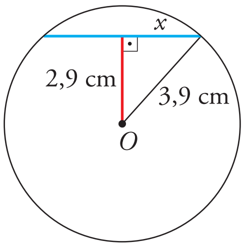


a)



$$r = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9 \text{ cm}$$

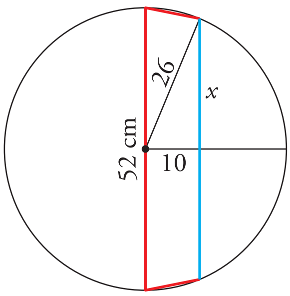
b)



$$x = \sqrt{3{,}9^2 - 2{,}9^2} = \sqrt{6{,}8} \approx 2{,}6 \text{ cm}$$

La longitud de la cuerda será $2 \cdot 2{,}6 = 5{,}2$ cm

49 ■□□ **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



$$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ cm}$$

$$A_{\text{CUADRILÁTERO (TRAPECIO)}} = \frac{(48 + 52) \cdot 10}{2} = 500 \text{ cm}^2$$

50 ■□□ Ejercicio resuelto

Hallar el radio de un arco de 100,48 m de longitud y 72° de apertura (π = 3,14).

- Calculamos la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{360°} = \frac{100,48}{72°} \rightarrow l = 502,4 \text{ m}$$

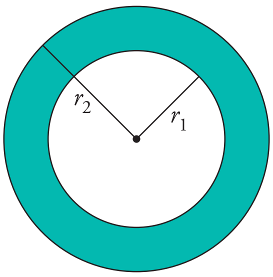
- Hallamos el radio: $2\pi r = 502,4$ m
- $2\pi r = 502,4 \rightarrow r = \frac{502,4}{2\pi} \approx 79,96$ m

51 ■□□ Calcula la medida, en grados, de un arco que mide 31,4 cm correspondiente a una circunferencia de 471 cm de longitud (π = 3,14).

$$l_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot r = 471 \rightarrow r = \frac{471}{2\pi} = 75 \text{ cm}$$

$$l_{\text{ARCO}} = \frac{2\pi \cdot 75}{360°} \cdot (\text{APERTURA}) = 31,4 \rightarrow \text{APERTURA} = 24°$$

52 ■■□ El área de una corona circular es 20π cm^2, y la circunferencia interna mide 8π cm. Calcula el radio de la circunferencia externa.



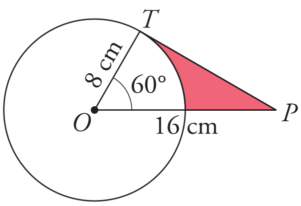
$$8\pi = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \rightarrow r_1 = \frac{8\pi}{2\pi} = 4 \text{ cm}$$

$$20\pi = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot 4^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

53 ■■□ Calcula:

a) La longitud de *PT*.

b) El área de la parte coloreada.



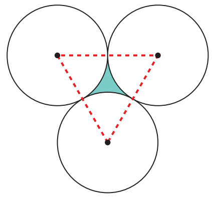
a) $\overline{PT} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192} \approx 13,86$ cm

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{360°} \cdot 60° \approx 33{,}51 \text{ cm}^2$

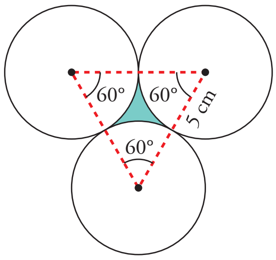
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{8 \cdot 13{,}86}{2} = 54{,}24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 54{,}24 - 33{,}51 = 20{,}73 \text{ cm}^2$

54 **Calcula el área del triángulo curvilíneo comprendido entre tres circunferencias tangentes y cuyo radio mide 5 cm.**



Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de 60°.



$A_{\text{SECTOR } 60°} = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 60° \approx 13{,}09 \text{ cm}^2$

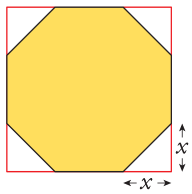
Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$s = \dfrac{30}{2} = 15 \;\to\; A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$

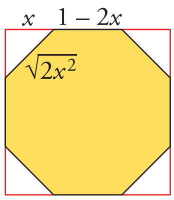
$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43{,}3 - 3 \cdot 13{,}09 = 4{,}09 \text{ cm}^2$

55 **a) A un cuadrado de 1 dm de lado le cortamos triangulitos isósceles en las cuatro esquinas. Calcula x para que el octógono resultante sea regular.**

b) Calcula el área de un octógono regular de 8 cm de lado.



a)



$\sqrt{2x^2} = 1 - 2x \;\to\; \sqrt{2} \cdot x = 1 - 2x \;\to$

$\to\; (2 + \sqrt{2})x = 1 \;\to\; x = \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0{,}35 \text{ dm}$

b) $x^2 + x^2 = 8^2 \;\to\; x = \sqrt{32} \approx 5{,}66 \text{ cm}$

Lado del cuadrado $= 5{,}66 \cdot 2 + 8 = 19{,}32$ cm

Área del octógono:

$A_{\text{CUADRADO}} = (19{,}32)^2 \approx 373{,}26 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{(5{,}66)^2}{2} = 16{,}02 \text{ cm}^2$

$A_{\text{OCTÓGONO}} = 373{,}26 - 4 \cdot 16{,}02 = 309{,}18 \text{ cm}^2$

O bien:

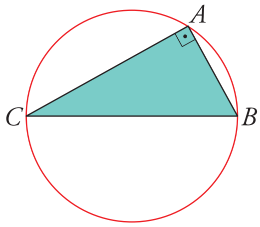
$A_{\text{OCTÓGONO}} = \dfrac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot (19{,}32 : 2)}{2} = 309{,}12 \text{ cm}^2$

(La apotema del octógono es la mitad del lado del cuadrado).

PÁGINA 201

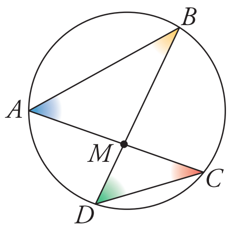
REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

56 **¿Qué se puede afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?**



El ángulo $\hat{A}$ está inscrito en una semicircunferencia. Abarca un arco de 180°. Por tanto, su media es de 90°, es decir, es recto. Por ello, se puede afirmar que todo triángulo que tenga un lado que coincida con el diámetro de su circunferencia circunscrita es rectángulo.

57 **Justifica por qué los triángulos ABM y CDM tienen los ángulos iguales. ¿Cómo son esos triángulos?**



Los ángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{DMC}$ son opuestos por el vértice, y por tanto son iguales. Los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BDC}$ abarcan el mismo arco y ambos están inscritos en la circunferencia, por lo que son iguales.

Como los triángulos ABM y CDM tienen dos ángulos iguales, sabemos que tienen los tres ángulos iguales. Por ello, sabemos que son semejantes.

58 **¿Cómo se llama el lugar geométrico de los puntos desde los cuales *se ve* un segmento AB bajo un ángulo de 60°?**

El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento AB bajo un ángulo de 60° se llama arco capaz para AB de 60°.

59 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es 26 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos es 26 cm es una elipse. Los dos puntos fijos se llaman focos.

60 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm? ¿Cómo se llaman los dos puntos fijos?**

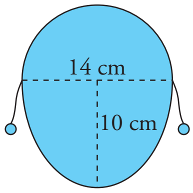
El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es 4 cm es una hipérbola. Los dos puntos fijos se llaman focos.

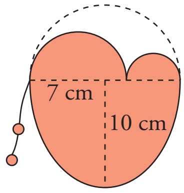
61 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada? ¿Cómo se llaman el punto fijo y la recta?**

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada es la parábola. El punto fijo se llama foco, y la recta, directriz.

PROFUNDIZA

62 ■■■ **Observa la primera figura en forma de huevo (compuesta por un semicírculo, una semielipse y dos circulitos de 1 cm de diámetro), y la segunda figura en forma de corazón (compuesta por dos semicírculos, una semielipse y dos circulitos de 1 cm de diámetro):**

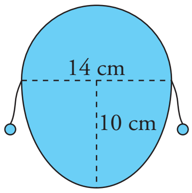




Halla los radios, x e y, de los dos semicírculos de la segunda figura para que la superficie del "corazón" sea el 80% de la superficie del "huevo" (con los dos circulitos incluidos en las dos figuras).

☞ *Ten en cuenta que $2x + 2y = 14$ cm.*

$$A_{1.^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$$



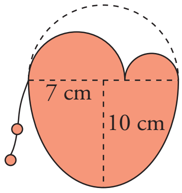
$$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 7}{2} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2$$

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \frac{\pi \cdot 7^2}{2} \approx 76{,}97 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}79 \text{ cm}^2$

$A_{1.^a \text{ FIGURA}} = 109{,}96 + 76{,}97 + 2 \cdot 0{,}79 = 188{,}51 \text{ cm}^2$

$A_{2.^a \text{ FIGURA}} = A_{1/2 \text{ ELIPSE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} + A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} + 2A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}}$



$$A_{1/2 \text{ ELIPSE}} \approx 109{,}96 \text{ cm}^2 \qquad A_{1/2 \text{ CÍRCULO MEDIANO}} = \frac{\pi \cdot y^2}{2}$$

$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO GRANDE}} = \frac{\pi \cdot x^2}{2} \qquad A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = 0{,}79 \text{ cm}^2$$

$A_{2.^a \text{ FIGURA}} = 0{,}8 \cdot 188{,}51 \approx 150{,}81 \text{ cm}^2$

Por tanto, sabemos que:

$$150{,}81 = 109{,}96 + \frac{\pi \cdot x^2}{2} + \frac{\pi \cdot y^2}{2} + 2 \cdot 0{,}79$$

y además sabemos que:

$$2x + 2y = 14$$

Resolvemos el sistema y nos queda $x = 3$, $y = 4$ o $x = 4$, $y = 3$.

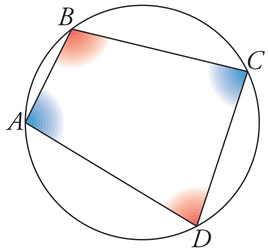
Solución: los radios de los dos semicírculos miden 3 cm y 4 cm.

63 **El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:**

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2},\ \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2},\ \hat{C} + \hat{A} = \frac{\widehat{BAD} + \widehat{BCD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Comprueba de igual forma que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

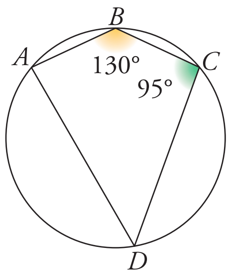
Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.



$$\hat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2},\ \hat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \rightarrow \hat{B} + \hat{D} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = 180°$$

La condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia es que cada dos ángulos no contiguos del cuadrilátero sumen 180°.

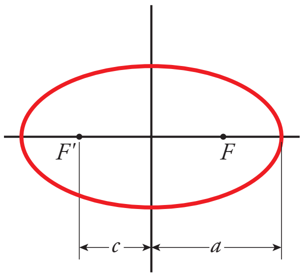
64 **Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$. (Ten en cuenta el problema anterior).**

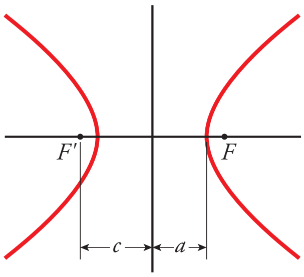


$\hat{A} = 180° - 95° = 85°$

$\hat{D} = 180° - 130° = 50°$

65 **Se llama excentricidad de una elipse o de una hipérbola al resultado de dividir la distancia focal (distancia entre sus focos) entre el eje mayor:**





$$\textbf{excentricidad} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

En la circunferencia, los focos coinciden con el centro; por tanto, su excentricidad es 0. La excetricidad de la parábola es 1. Razona, mirando los dibujos anteriores, que la excentricidad de una elipse es un número comprendido entre 0 y 1; y que la de una hipérbola es mayor que 1.

En una elipse, $c < a$. Por tanto, la excentricidad, $\frac{c}{a}$, siempre va a ser un número menor que 1 y mayor que 0 porque tanto c como a son números positivos.

En la hipérbola, $a < c$ siempre. Por tanto, la excentricidad, $\frac{c}{a}$, siempre va a ser un número mayor que 1.