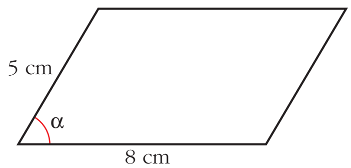
5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 133

REFLEXIONA Y RESUELVE

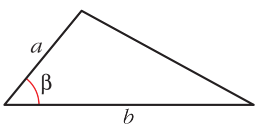
Relaciones trigonométricas en el triángulo

■ **Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α:**



Área = $8 \cdot 5\ sen\ \alpha = 40\ sen\ \alpha\ \text{cm}^2$

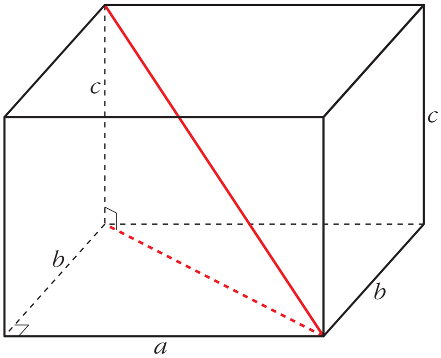
■ **Halla el área de este triángulo en función del ángulo β:**



Área triángulo = $\dfrac{a\ b\ sen\ \beta}{2}$

Diagonal de un ortoedro

■ **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.**



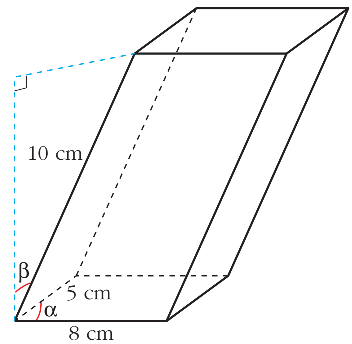
Diagonal = $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

■ **Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c.**

En general: Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Volumen de un paralelepípedo

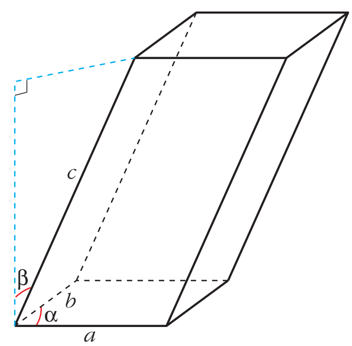
■ **Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β:**



$$\left.\begin{array}{l}\text{Área base} = 40\ sen\ \alpha \\ \text{Altura} = 10\ cos\ \beta\end{array}\right\}$$

Volumen = $400\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$ cm^3

■ **¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas *a*, *b*, *c*, tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α, y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?**



Volumen = $a\ b\ c\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Página 135

1. **La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.**

a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

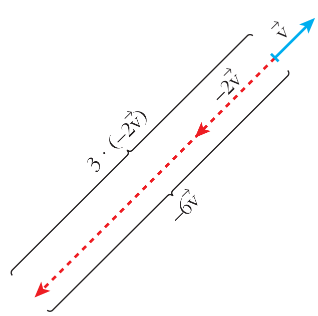
b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:

$b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

b) $$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v}\end{array}\right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



2. **La propiedad distributiva $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.**

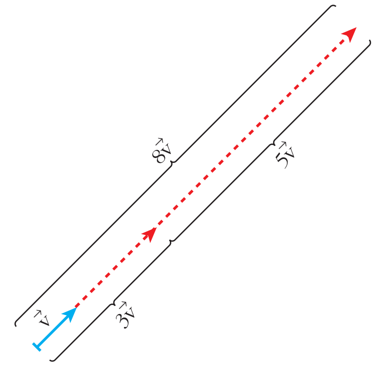
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $$\left.\begin{array}{l} (a+b)\cdot\vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\} \; 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



Página 137

1. **Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:**

a) $2\vec{u}$ b) $0\vec{v}$ c) $-\vec{u}$ d) $2\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{u} - \vec{v}$ f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2\cdot(-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0\cdot\vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. **Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla:**

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$$

$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$

$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$

$$\left.\begin{array}{r} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6, \; b = -2, \; c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 139

1. Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, k, 3)$.

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Halla k para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$

b) Como $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{w} \neq 0$, son perpendiculares si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow \; \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 7 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 7k + 33 = 7k + 25 = 0 \;\rightarrow\; k = -\dfrac{25}{7}$

Página 141

1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 132°\ 1'\ 26''$

d) *Segmento proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

Vector proyección de $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \dfrac{-11}{9}(-1, 2, -2)$

Segmento proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$

Vector proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \dfrac{-11}{30}(5, -1, 2)$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí:

$\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: (0, –7, 2); (–7, 0, 3); (–2, 3, 0)

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$\vec{u}(5, -1, 2) \qquad \vec{v}(-1, 2, -2)$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \Rightarrow (5, -1, 2)\cdot(x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow (-1, 2, -2)\cdot(x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser (–2, 8, 9) o cualquier otro paralelo a él.

Página 144

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}(3, 7, -6)$ y $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.

3. **Halla el área del triángulo determinado por los vectores:**

$$\vec{u}(3, 7, -6) \text{ y } \vec{v}(4, 1, -2)$$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

Página 145

1. **Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2. **Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 **Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:**

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } a = 2, \ b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 **Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \ \rightarrow \ (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $ran\,(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 **Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.**

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \ \rightarrow \ (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

s4 **Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(m, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, m)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, n)$

a) $\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m + 2)^2 = 0 \;\rightarrow\; m = -2$

Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \;\rightarrow\; n = \dfrac{-5}{8}$

Si $n = \dfrac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

s5 **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?:**

A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}

B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0,1)}

C = {(–3, 2, 1), (1, 2, –1), (1, 0, 1)}

$A = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, 1),\ (2, 2, 2)\}$

Como $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

$B = \{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego no son una base.

$C = \{(-3, 2, 1),\ (1, 2, -1),\ (1, 0, 1)\}$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Los vectores son linealmente independientes.

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes es una **base** de $\mathbb{R}^3$.

s6 **¿Para qué valores de a el conjunto de vectores S = {(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)} es una base?**

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a\,(a - 1) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

7 **En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ **y** $|\vec{b}|$

c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

d) *Vector proyeccción de* $\vec{b}$ *sobre* $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (vector cero)

8 **Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:**

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1)$; $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \ \rightarrow \ m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \ \rightarrow \ m = \dfrac{2}{5}$

9 **Halla el vector proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2}(1, -1, 2) = \frac{3 - 1 + 4}{1^2 + 1^2 + 2^2}(1, -1, 2) = \frac{6}{6}(1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

La proyección es el propio vector $\vec{v}$.

Razonadamente:

Longitud de la proyección:

$$|\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}\,\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\sqrt{6} \cdot \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

10 **¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ no son ortogonales.

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}} \approx 0{,}089 \quad \rightarrow \quad \alpha = 84°\ 53'\ 20''$$

11 **Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{5}{3}$$

12 **Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \quad \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Producto vectorial

13 **Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.**

$\vec{u}(2, -1, 1)$; $\vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$

14 **Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.**

Área $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1\,133} \approx 33{,}66\ u^2$

15 **Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{91}}, \dfrac{-1}{\sqrt{91}}, \dfrac{9}{\sqrt{91}}\right)$

16 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.**

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|}(-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea $\sqrt{24}$:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector $(-2, -2, 4)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es $\sqrt{24}$.

También cumple estas condiciones su opuesto: $(2, 2, -4)$.

Producto mixto

17 **Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:**

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

s18 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.**

Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.

- $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow$ Volumen $= 70\ u^3$

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$

19 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:**

$$\vec{a}(3, -1, 1),\ \vec{b}(1, 7, 2),\ \vec{c}(2, 1, -4)$$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow$ Volumen $= \dfrac{1}{6} \cdot 111 = 18{,}5u^3$

s20 **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$

Página 150

PARA RESOLVER

s21 **Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c.

Por tanto, son linealmente independientes.

22 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a}(1, 2, -1)$

$\vec{b}(1, 3, 0)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

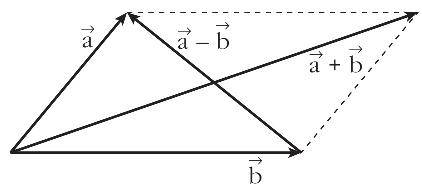
$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

23 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

24 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$. **b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.**

a) $\vec{u}(x, y, z)$ ha de cumplir $-2x + 2y - 4z = 0$ y ser unitario.

Por ejemplo, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

25 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \ // \ (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

s26 **Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

s27 **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

s28 **a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:**

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 11, 14)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \dfrac{-27}{8}$

b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$; $\vec{u}_2(2, 4, 7)$; $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$(7, 11, 14) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 11 \\ 5a + 7b + 3c &= 14 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -3 \\ 14 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{102}{51} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 11 & -3 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{51}{51} = 1;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix}}{51} = \frac{-51}{51} = -1$$

Por tanto: $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

s29 **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \;\Big< \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

s30 **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1.°) Es perpendicular a $\vec{u}$, es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2.°) Es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{array}\right\} \quad \text{Sumando: } \begin{array}{l} 6z = -6y \;\rightarrow\; z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

s31 **Dados los vectores $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:**

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto:

$$\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

s32 **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.**

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad ran\,(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{aligned} 2b &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a - 3b &= x \end{aligned}\right\} \quad \text{Debe tener solución:} \quad \begin{aligned} & b = \frac{1}{2}, \; a = \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \;\rightarrow\; x = \frac{-2}{2} = -1 \;\rightarrow\; x = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

s33 **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25\ u^2$.**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25\ u^2$, ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$$

es decir: $125x^2 = 625 \;\rightarrow\; x^2 = 5 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

s34 **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1.°) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2.°) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y \quad\quad = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3x + z = 5y \\ 2x \quad\quad = -3y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \dfrac{9}{2}y = \dfrac{1}{2}y \\ x = -\dfrac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

s35 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot cos\,60° = 16 + 4 + 8 = 28 \;\rightarrow\; |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Por otra parte:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 16 + 4 - 8 = 12 \;\rightarrow\; |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

s36 **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

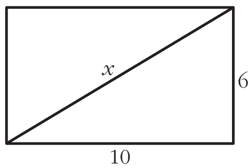
$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \;\rightarrow\; |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \;\rightarrow\; x^2 = 136 \;\rightarrow\; x = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

s37 **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a}+\vec{b}| = 7$.**

Puesto que $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, empecemos desarrollando esta expresión:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} =$$

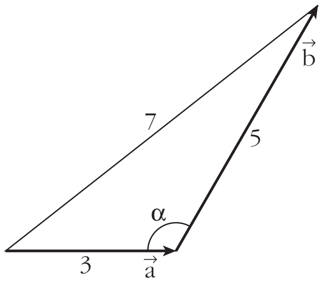
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Sustituimos $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ por sus valores, y $\vec{a}\cdot\vec{b}$ por su expresión, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5 cos\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

$$cos\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60°$$

Veamos otra forma de resolverlo, basada en la resolución de triángulos aprendida en 1.° de Bachillerato:

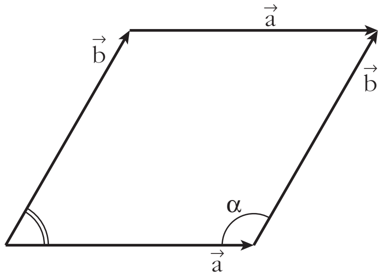


Aplicamos el teorema del coseno a este triángulo:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5 cos\,\alpha \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\,\alpha = \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{-2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 120°$$

Observamos que el ángulo buscado es el suplementario de α:



$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 180° - \alpha = 180° - 120° = 60°$$

38 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 2\,\vec{v} = \vec{b} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} \qquad = 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el ángulo formado por $\vec{u'} = 5\vec{u}$ y $\vec{v'} = 5\vec{v}$:

$\vec{u'} = (7, 0, -1)$; $\vec{v'} = (3, -5, 1)$

$\vec{u'} \cdot \vec{v'} = 20$

$|\vec{u'}| = \sqrt{50}$; $|\vec{v'}| = \sqrt{35}$

$$cos\,(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = \frac{\vec{u'} \cdot \vec{v'}}{|\vec{u'}|\,|\vec{v'}|} = \frac{20}{\sqrt{50}\,\sqrt{35}} = 0,4781$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = 61°\ 26'\ 21''$

39 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:**

$$|\vec{u}| = 5,\ |\vec{v}| = 4,\ |\vec{w}| = 7,\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

☛ ***Desarrolla el siguiente producto escalar:***

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

Desarrollando el producto escalar indicado:

$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Por otra parte: $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$

Así: $5^2 + 4^2 + 7^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

Página 151

CUESTIONES TEÓRICAS

40 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

41 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \to \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{c} \quad \to \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

42 **Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.**

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ (pues $|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

43 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2 \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \quad \to$

$\to \quad \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} > 1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \quad \to \quad |\vec{u}||\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}||\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -|\vec{u}||\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \to \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0° \\ |\vec{u}||\vec{v}| = -|\vec{u}||\vec{v}| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \to \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

44 **Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

45 **Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:**

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

46 **Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.**

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

s47 **Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:**

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}],\quad [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}],\quad [\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}]$$

Puesto que $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1)$; $\vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1)$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

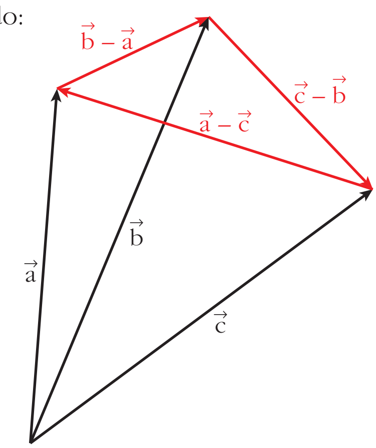
Análogamente:

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

$$[\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Son L.D.}$$

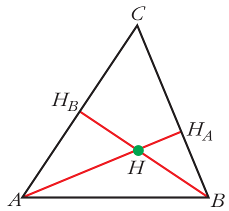
Interpretación geométrica de este último resultado:

Los vectores $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ son los lados del triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuando los situamos con origen común. Por tanto, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$ son coplanarios.



PARA PROFUNDIZAR

48 **"Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto".**



Para demostarlo, llamamos H al punto en que se cortan dos alturas, AH_A y BH_B. Da los pasos que se indican a continuación:

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$$

y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H. (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$\vec{BC} \perp \vec{AH_A} \rightarrow \vec{BC} \perp \vec{HA} \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

b) $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \stackrel{(1)}{=}$

$$= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \stackrel{(2)}{=} 0$$

(1) $\vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$

(2) $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp \vec{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.

Página 151

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Halla el valor de *m* para el cual $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(-1, m, 3)$ son linealmente dependientes.

b) Obtén, en este caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean L.D., el rango de la matriz que forman ha de ser menor que 3. Así:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - 2m = 0 \rightarrow m = -1$$

Si $m = -1$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son L.D.

b) Sea $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rightarrow (1, 2, -1) = \alpha(0, 1, 2) + \beta(-1, -1, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= -\beta \\ 2 &= \alpha - \beta \\ -1 &= 2\alpha + 3\beta \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \beta &= -1 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

Así, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$.

2. $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$, $\vec{v}(4, -2, -4)$. Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$

- $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$

- $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} =$

$$= \frac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0{,}3780$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \mathit{arc\ cos}\,(0{,}3780) = 67°\ 47'\ 26''$

- Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16}(4, -2, -4) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)(4, -2, -4)$$

3. Dados los vectores $\vec{u}(3, -4, 0)$ y $\vec{v}(m, 0, 7)$:

a) Halla m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) Obtén tres vectores unitarios. $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, que tengan, respectivamente, la misma dirección que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) ¿Forman $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{w}'$ una base ortonormal?

a) Como $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \rightarrow m = 0$

Así, $\vec{v}(0, 0, 7)$.

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{v}| = 7$

$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$

Sean:

$\vec{u}' = \dfrac{1}{5}(3, -4, 0)$ $\qquad \vec{u}'\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}, 0\right) // \vec{u}$

$\vec{v}' = \dfrac{1}{7}(0, 0, 7)$ $\qquad \vec{v}'(0, 0, 1) // \vec{v}$

$\vec{w}' = \dfrac{1}{35}(-28, -21, 0)$ $\qquad \vec{w}'\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}, 0\right) // \vec{w}$

$\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ tienen módulo 1.

d) $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ es ortonormal.

4. Halla el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}(5, -1, 3)$ y $\vec{v}(4, 0, 7)$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|(-7, -23, 4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-23)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{594} = 12{,}2 \text{ u}^2$$

5. Halla el volumen del tetraedro determinado por los vectores:

$\vec{u}(5, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 0, 7)$, $\vec{w}(-2, 6, 3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \text{valor absoluto de} \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}|-112| = \frac{56}{3} = 18{,}7 \text{ u}^3$$

6. Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a (3, –1, 0) y forme un ángulo de 60° con (0, 0, 1).

Llamamos (x, y, z) al vector buscado:

- Su módulo es 10 $\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 100$
- Es perpendicular a (3, –1, 0) $\rightarrow 3x - y = 0$
- Forma un ángulo de 60° con (0, 0, 1) $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{(0, 0, 1) \cdot (x, y, z)}{|(0, 0, 1)| \cdot |(x, y, z)|} = \cos 60° \rightarrow \frac{z}{1 \cdot 10} = \frac{1}{2} \rightarrow 2z = 10 \rightarrow z = 5$$

Así:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ 3x - y = 0 \\ z = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ y = 3x \\ z = 5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.ª y 2.ª ecuación en la 1.ª:

$$x^2 + 9x^2 + 25 = 100 \rightarrow 10x^2 = 75 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Soluciones: $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$