

PÁGINA 98

PRACTICA

Traducción a lenguaje algebraico

1 ■■■ Asocia a cada enunciado una de las expresiones algebraicas que aparecen debajo:

- a) El cuadrado de un número menos su doble.
- b) El 80% de un número.
- c) Un número impar.
- d) Los dos tercios de un número más cinco unidades.

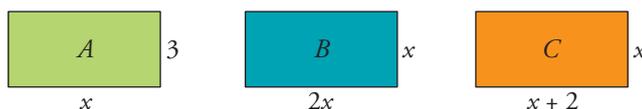
$$\frac{2}{3}x + 5; \quad x^2 - 2x; \quad 0,8x; \quad 2x + 1$$

- a) El cuadrado de un número menos su doble $\rightarrow x^2 - 2x$
- b) El 80% de un número $\rightarrow 0,8x$
- c) Un número impar $\rightarrow 2x + 1$
- d) Los $\frac{2}{3}$ de un número más 5 unidades $\rightarrow \frac{2}{3}x + 5$

2 ■■■ Expresa en lenguaje algebraico empleando una sola incógnita.

- a) El triple de un número menos dos.
 - b) El producto de dos números consecutivos.
 - c) El cuadrado de un número más su mitad.
 - d) La suma de un número con otro diez unidades mayor.
- a) El triple de un número menos dos: $3x - 2$.
 - b) El producto de dos números consecutivos: $x(x + 1)$.
 - c) El cuadrado de un número más su mitad: $x^2 + \frac{x}{2}$.
 - d) La suma de un número con otro diez unidades mayor: $x + (x + 10)$.

3 ■■■ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



$$A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 3) = 2x + 6 \\ \text{Área} = 3x \end{cases} \quad B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(2x + x) = 6x \\ \text{Área} = 2x \cdot x = 2x^2 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + 2 + x) = 4x + 4 \\ \text{Área} = (x + 2)x = x^2 + 2x \end{cases}$$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

4 ■■■ Traduce a lenguaje algebraico utilizando dos incógnitas.

- a) La suma de los cuadrados de dos números.
 - b) El cuadrado de la diferencia de dos números.
 - c) La mitad del producto de dos números.
 - d) La semisuma de dos números.
- a) La suma de los cuadrados de dos números: $x^2 + y^2$.
 - b) El cuadrado de la diferencia de dos números: $(x - y)^2$.
 - c) La mitad del producto de dos números: $\frac{x \cdot y}{2}$.
 - d) La semisuma de dos números: $\frac{x + y}{2}$.

5 ■■■ Si x e y son las edades actuales de dos hermanos, expresa los siguientes enunciados utilizando ambas incógnitas:

- a) La suma de las edades que tenían hace 5 años.
- b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.
- c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad del menor.

a) La suma de las edades que tenían hace 5 años:

$$(x - 5) + (y - 5) = x + y - 10$$

b) El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años:

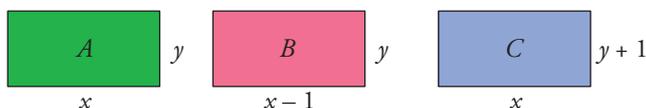
$$(x + 6)(y + 6) = xy + 6x + 6y + 36$$

c) La diferencia entre la edad del mayor y la mitad del menor:

$$x - \frac{y}{2} \text{ si la edad del mayor es } x$$

$$y - \frac{x}{2} \text{ si la edad del mayor es } y$$

6 ■■■ Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:



$$A \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

Monomios

7 ■■■ Indica el grado de cada uno de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $-5xy$ b) $(-7x)^3$ c) $8x$ d) $(xy)^2$

e) $\frac{2}{3}x^2y^2$ f) $\frac{4}{5}x^3$ g) $\frac{-3yx}{5}$ h) $\frac{1}{2}x^2$

a) Grado 2. b) Grado 3. c) Grado 1. d) Grado 4.

e) Grado 4. f) Grado 3. g) Grado 2. h) Grado 2.

Son semejantes: a) y g); b) y f); d) y e).

8 ■■■ Calcula el valor numérico de los monomios del ejercicio anterior para $x = -1$ e $y = 3$.

a) $-5 \cdot (-1) \cdot 3 = 15$ b) $[-7 \cdot (-1)]^3 = 343$ c) $8(-1) = -8$

d) $[(-1) \cdot 3]^2 = 9$ e) $\frac{2}{3}(-1)^2 \cdot 3^2 = 6$ f) $\frac{4}{5}(-1)^3 = -\frac{4}{5}$

g) $\frac{-3 \cdot 3(-1)}{5} = \frac{9}{5}$ h) $\frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$

9 ■■■ Simplifica.

a) $6x^2 - 7x^2 + 3x^2$ b) $-6xy - 5xy + 10xy$

c) $\frac{1}{3}xy^2 - \frac{3}{5}xy^2 - \frac{7}{3}xy^2$ d) $\frac{2x^3}{3} + \frac{1}{5}x^3 - x^3$

a) $6x^2 - 7x^2 + 3x^2 = 2x^2$ b) $-6xy - 5xy + 10xy = -xy$

c) $\frac{1}{3}xy^2 - \frac{3}{5}xy^2 - \frac{7}{3}xy^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} - \frac{7}{3}\right)xy^2 = -\frac{13}{5}xy^2$

d) $\frac{2x^3}{3} + \frac{1}{5}x^3 - x^3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - 1\right)x^3 = -\frac{2}{15}x^3$

10 ■■■ Efectúa.

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2$ b) $2x + 7y - 3x + y - x^2$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $5x - x^2 + 7x^2 - 9x + 2 = 6x^2 - 4x + 2$

b) $2x + 7y - 3x + y - x^2 = -x^2 - x + 8y$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2 = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

11 ■■■ Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $6x^2(-3x)$ b) $(2xy^2)(4x^2y)$ c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2(-3x) = -18x^3$ b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

Polinomios

12 ■■■ Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(2x^3 - 5x + 3) - (2x^3 - x^2 + 1)$ b) $5x - (3x + 8) - (2x^2 - 3x)$

¿Cuál es el grado de cada polinomio?

a) $2x^3 - 5x + 3 - 2x^3 + x^2 - 1 = x^2 - 5x + 2 \rightarrow$ Grado 2.

b) $5x - 3x - 8 - 2x^2 + 3x = -2x^2 + 5x - 8 \rightarrow$ Grado 2.

13 ■■■ Considera estos polinomios:

$$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 \quad B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4 \quad C = -x^3 + 3x^2 - 7x$$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$$

$$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$$

$$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x = 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$$

$$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$$

$$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$$

$$= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$$

PÁGINA 99

14 ■■■ Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante.

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right)$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$
 $= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \rightarrow$ Grado 3.

b) $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$
 $= -12x^3 + 3x^2 - 6x \rightarrow$ Grado 3.

c) $\frac{1}{3}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - 9\right) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 \rightarrow$ Grado 4.

15 ■■■ Opera y simplifica.

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x + 4)(2x^2 + 3x - 5) - 3x(-x + 1)$

c) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x + 4)(2x^2 + 3x - 5) - 3x(-x + 1) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 8x^2 + 12x - 20 + 3x^2 - 3x =$
 $= 2x^3 + 14x^2 + 4x - 20$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\begin{aligned} \text{c) } (x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) &= x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x = \\ &= -6x^3 + 8x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) &= 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 = \\ &= 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2 \end{aligned}$$

16 ■■■ Extrae factor común.

$$\text{a) } 12x^3 - 8x^2 - 4x$$

$$\text{b) } -3x^3 + x - x^2$$

$$\text{c) } 2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2$$

$$\text{d) } \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$$

$$\text{a) } 12x^3 - 8x^2 - 4x = 4x(3x^2 - 2x - 1)$$

$$\text{b) } -3x^3 + x - x^2 = x(-3x^2 + 1 - x)$$

$$\text{c) } 2xy^2 - 4x^2y + x^2y^2 = xy(2y - 4x + xy)$$

$$\text{d) } \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x + x^2 - 5)$$

17 ■■■ Extrae factor común como en el ejemplo.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3x(x + 1) - x^2(x + 1) + (x + 1)(x^2 - 2) &= (x + 1)[3x - x^2 + x^2 - 2] = \\ &= (x + 1)(3x - 2) \end{aligned}$$

$$\text{a) } 2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2)$$

$$\text{b) } x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3)$$

$$\text{c) } 3x^2(x + 3) - 6x(x + 3)$$

$$\text{a) } 2x(x - 2) + x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(2x + x^2 - 3)$$

$$\text{b) } x^2(x + 1) - x^2(x + 2) + 2x^2(x - 3) = x^2[x + 1 - (x + 2) + 2(x - 3)] = x^2(2x - 7)$$

$$\text{c) } 3x^2(x + 3) - 6x(x + 3) = x(x + 3)(3x - 6)$$

Identidades notables

18 ■■■ Desarrolla estas expresiones:

$$\text{a) } (x + 6)^2$$

$$\text{b) } (7 - x)^2$$

$$\text{c) } (3x - 2)^2$$

$$\text{d) } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{e) } (x - 2y)^2$$

$$\text{f) } \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2$$

$$\text{a) } (x + 6)^2 = x^2 + 36 + 12x$$

$$\text{b) } (7 - x)^2 = 49 + x^2 - 14x$$

$$\text{c) } (3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$$

$$\text{d) } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} + x$$

$$\text{e) } (x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$$

$$\text{f) } \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}y\right)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{15}xy$$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

19 ■■■ Efectúa estos productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$

b) $(3 + x)(3 - x)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x)$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

a) $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$

b) $(3 + x)(3 - x) = 9 - x^2$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x) = 9 - 16x^2$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$

e) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

f) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$

20 ■■■ Simplifica todo lo posible las expresiones siguientes:

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1)$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2$

a) $(x + 3)(x - 3) - (x + 3)^2 = x^2 - 9 - (x^2 + 9 + 6x) = 6x - 18$

b) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 - 9 = 4x^2 + 9 + 12x - (4x^2 + 9 - 12x) - 9 = 4x^2 + 9 + 12x - 4x^2 - 9 + 12x - 9 = -9$

c) $3x(x + 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 3x(x^2 + 1 + 2x) - (4x^2 - 1) = 3x^3 + 3x + 6x^2 - 4x^2 + 1 = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

d) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) - (x^2 - 1)^2 = x^4 - 4 - (x^4 + 1 - 2x^2) = x^4 - 4 - x^4 - 1 + 2x^2 = 2x^2 - 5$

21 ■■■ Transforma en diferencia de cuadrados.

a) $(2x + 7)(2x - 7)$

b) $(4x - 1)(4x + 1)$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x)$

d) $(1 - 5x)(1 + 5x)$

a) $(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$

b) $(4x - 1)(4x + 1) = 16x^2 - 1$

c) $(x^2 + x)(x^2 - x) = x^4 - x^2$

d) $(1 - 5x)(1 + 5x) = 1 - 25x^2$

22 ■■■ Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:

a) $x^2 + \dots + 4x$

b) $x^2 + \dots - 10x$

c) $x^2 + 9 + \dots$

d) $x^2 + 16 - \dots$

a) $x^2 + 4 + 4x$

b) $x^2 + 25 - 10x$

c) $x^2 + 9 + 6x$

d) $x^2 + 16 + 8x$

23 ■■■ Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.

• $x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2$

a) $x^2 + 49 - 14x$

b) $x^2 + 1 - 2x$

c) $4x^2 + 1 + 4x$

d) $x^2 + 12x + 36$

a) $x^2 + 49 - 14x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$

c) $(4x^2 + 1 + 4x) = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

Fracciones algebraicas

24 ■■■ Simplifica estas fracciones algebraicas:

a) $\frac{9x}{12x^2}$

b) $\frac{x(x+1)}{5(x+1)}$

c) $\frac{x^2(x+2)}{2x^3}$

a) $\frac{9x}{12x^2} = \frac{3}{4x}$

b) $\frac{x(x+1)}{5(x+1)} = \frac{x}{5}$

c) $\frac{x^2(x+2)}{2x^3} = \frac{x+2}{2x}$

25 ■■■ Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:

a) $\frac{x^2 - 4x}{x^2}$

b) $\frac{3x}{x^2 + 2x}$

c) $\frac{3x + 3}{(x + 1)^2}$

d) $\frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2}$

e) $\frac{8x^3 - 4x^2}{(2x - 1)^2}$

f) $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2}$

a) $\frac{x^2 - 4x}{x^2} = \frac{x(x - 4)}{x^2} = \frac{x - 4}{x}$

b) $\frac{3x}{x^2 + 2x} = \frac{3x}{x(x + 2)} = \frac{3}{x + 2}$

c) $\frac{3x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{3(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{3}{x + 1}$

d) $\frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2} = \frac{2x(x + 2)}{x^2(x + 2)} = \frac{2}{x}$

e) $\frac{8x^3 - 4x^2}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2(2x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2}{2x - 1}$

f) $\frac{5x^3 + 5x}{x^4 + x^2} = \frac{5x(x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{5}{x}$

26 ■■■ Opera, y simplifica si es posible.

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2}$

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3x}{(x+1)x^2} = \frac{3}{(x+1)x}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2} = \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

PÁGINA 100

27 ■■■ Efectúa.

$$a) \frac{1}{6x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{2x^3}$$

$$b) \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7}$$

$$c) \frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4}$$

$$d) \frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x+3}$$

$$e) \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{x}{4}$$

$$f) \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x^2+x} + 2$$

$$a) \frac{1}{6x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x^3} = \frac{x^2 + 18x - 3}{6x^3}$$

$$b) \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x-7} = \frac{2(x-7) + x(x-1)}{x(x-7)} = \frac{2x - 14 + x^2 - x}{x^2 - 7x} = \frac{x^2 + x - 14}{x^2 - 7x}$$

$$c) \frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} + \frac{x+1}{x-4} = \frac{2(x-4) - 3x + x(x+1)}{x(x-4)} = \frac{2x - 8 - 3x + x^2 + x}{x(x-4)} = \frac{x^2 - 8}{x^2 - 4x}$$

$$d) \frac{2}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2(x+3) - (x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - (x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 9} = \frac{2x + 6 - x^2 + 4x - 3}{x^2 - 9} = \frac{-x^2 + 6x + 3}{x^2 - 9}$$

$$e) \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2x} + \frac{x}{4} = \frac{2x \cdot 4 \cdot 3 + (x-1)4 + (x-1)2x \cdot x}{(x-1) \cdot 2x \cdot 4} = \frac{24x + 4x - 4 + 2x^3 - 2x^2}{(x-1) \cdot 2x \cdot 4} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 28x - 4}{(x-1) \cdot 2x \cdot 4} = \frac{2(x^3 - x^2 + 14x - 2)}{(x-1) \cdot 2x \cdot 4} = \frac{x^3 - x^2 + 14x - 2}{4x^2 - 4x}$$

$$f) \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x^2+x} + 2 = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} + 2 = \frac{3x - 1 + 2x(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x - 1 + 2x^2 + 2x}{x(x+1)} = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + x}$$

PIENSA Y RESUELVE

28 ■■■ Expresa algebraicamente:

a) El área del triángulo azul.

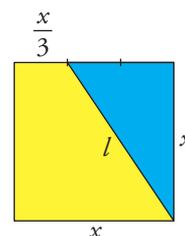
b) El área del trapecio amarillo.

c) La longitud de l .

$$a) \frac{(2x/3) \cdot x}{2} = \frac{1}{3}x^2$$

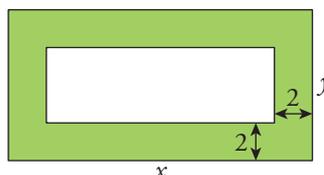
$$b) \frac{(x + x/3) \cdot x}{2} = \frac{2}{3}x^2$$

$$c) l = \sqrt{x^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{9}x^2}$$



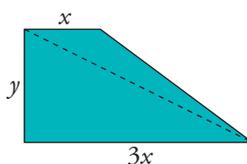
4 Soluciones a los ejercicios y problemas

29 ■■■ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.



$$A = xy - (x-4)(y-4) = xy - (xy - 4x - 4y + 16) = 4x + 4y - 16$$

30 ■■■ Expresa algebraicamente el área y la diagonal mayor de este trapecio:



$$\text{Área} = \frac{(3x+x)y}{2} = 2xy$$

$$\text{Diagonal: } \sqrt{y^2 + (3x)^2}$$

32 ■■■ Reduce las siguientes expresiones:

a) $6\left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right)$

c) $4\left[(x-2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right]$

d) $30\left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2}\right]$

a) $6\left(\frac{5x-4}{6} + \frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3}\right) = 5x-4 + 3(2x-3) - 2(x-1) =$
 $= 5x-4 + 6x-9 - 2x+1 = 9x-12$

b) $12\left(\frac{x+6}{3} - \frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4}\right) = 4(x+6) - 6(x+1) + 3(3x-1) =$
 $= 4x+24 - 6x-6 + 9x-3 = 7x+15$

c) $4\left[(x-2)^2 - \frac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4(x^2+4-2x) - 3x^2-16 = 4x^2+16-8x-3x^2-16 =$
 $= x^2-8x$

d) $30\left[\frac{x(x-2)}{15} - \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{1}{2}\right] = 2x(x-2) - 5(x^2+1+2x) + 15 =$
 $= 2x^2-4x-5x^2-5-10x+15 = -3x^2-14x+10$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

33 ■■■ Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado.

$$a) \frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12}$$

$$b) \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6}$$

$$c) \frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6}$$

$$d) \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8}$$

$$e) \frac{5(x-1)^2}{9} - \frac{7(x+2)^2}{12} + \frac{x(x+3)}{2}$$

$$\begin{aligned} a) \frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12} &= 24 \left(\frac{3+x}{8} - \frac{5-x}{6} - \frac{x+1}{12} \right) = \\ &= 3(3+x) - 4(5-x) - 2(x+1) = \\ &= 9 + 3x - 20 + 4x - 2x - 2 = 5x - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6} &= 12 \left(\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{6} \right) = \\ &= 3 \cdot 3(x-1) - 4(x+1) + 2 = 9x - 9 - 4x - 4 + 2 = \\ &= 5x - 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} &= 18 \left(\frac{(2x-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{6} \right) = 2(4x^2 + 25 - 20x) = \\ &= -3(x^2 + 1 + 2x) = 8x^2 + 50 - 40x - 3x^2 - 3 - 6x = \\ &= 5x^2 - 46x + 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x-2)}{4} - \frac{(3x+2)^2}{8} &= 8 \left(\frac{x^2-3x}{2} + \frac{x^2+2x}{4} - \frac{9x^2+4+12x}{8} \right) = \\ &= 4(x^2-3x) + 2(x^2+2x) - (9x^2+4+12x) = \\ &= 4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x - 9x^2 - 4 - 12x = \\ &= -3x^2 - 20x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \frac{5(x-1)^2}{9} - \frac{7(x+2)^2}{12} + \frac{x(x+3)}{2} &= \\ &= 36 \left(\frac{5(x^2+1-2x)}{9} - \frac{7(x^2+4+4x)}{12} + \frac{x^2+3x}{2} \right) = \\ &= 4 \cdot 5(x^2+1-2x) - 3 \cdot 7(x^2+4x+4) + 18(x^2+3x) = \\ &= 20x^2 + 20 - 40x - 21x^2 - 84x - 84 + 18x^2 + 54x = 17x^2 - 70x - 64 \end{aligned}$$

34 ■■■ Expresa como el cuadrado de una suma, como el cuadrado de una diferencia o como una diferencia de cuadrados.

$$a) x^2 + 9 - 6x$$

$$b) 4x^2 + 1 + 4x$$

$$c) 4x^2 - 9$$

$$d) 9x^2 - 12x + 4$$

$$e) 16x^2 - 1$$

$$f) 16x^2 + 40x + 25$$

$$a) x^2 + 9 - 6x = (x-3)^2$$

$$b) 4x^2 + 1 + 4x = (2x+1)^2$$

$$c) 4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$$

$$d) 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$$

$$e) 16x^2 - 1 = (4x+1)(4x-1)$$

$$f) 16x^2 + 40x + 25 = (4x+5)^2$$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

35 ■■■ Transforma en producto como en el ejemplo.

• $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

a) $x^3 - 4x$

b) $4x^3 - 4x^2 + x$

c) $x^4 - x^2$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x - 1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x - 4)^2$

36 ■■■ Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.

a) $\frac{2x + 4}{3x^2 + 6x}$

b) $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

c) $\frac{x - 2}{x^2 + 4 - 4x}$

d) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

e) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

f) $\frac{x^3 + 2x^2 + x}{3x + 3}$

a) $\frac{2x + 4}{3x^2 + 6x} = \frac{2(x + 2)}{3x(x + 2)} = \frac{2}{3x}$

b) $\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$

c) $\frac{x - 2}{x^2 + 4 - 4x} = \frac{x - 2}{(x - 2)^2} = \frac{1}{x - 2}$

d) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x}{x + 3}$

e) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}$

f) $\frac{x^3 + 2x^2 + x}{3x + 3} = \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{3(x + 1)} = \frac{x(x + 1)^2}{3(x + 1)} = \frac{x(x + 1)}{3}$

PÁGINA 101

37 ■■■ Expresa cada enunciado con una identidad:

a) La raíz cuadrada del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces cuadradas del dividendo y del divisor.

b) La potencia del producto de dos números es igual al producto de las potencias de los factores.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

d) El producto de un número por el siguiente es igual a ese número más su cuadrado.

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

b) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

c) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

d) $x(x + 1) = x^2 + x$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

38 ■■■ ¿Cuándo se dice que un número es raíz de un polinomio?

Comprueba si 3 es raíz de alguno de estos polinomios:

$$P = x^3 - 2x^2 + x - 12$$

$$Q = x^3 - 5x^2 - 7x$$

$$R = (x^4 - 5x + 10)(x - 3)$$

¿Es 0 raíz de alguno de los polinomios anteriores?

Cuando al sustituir x por ese número, el valor del polinomio es 0.

$$P = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 - 12 = 27 - 18 + 3 - 12 = 0 \rightarrow 3 \text{ es raíz de } P.$$

$$Q = 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 = 27 - 45 - 21 \neq 0 \rightarrow 3 \text{ no es raíz de } Q.$$

$$R = (3^4 - 5 \cdot 3^3 + 10)(3 - 3) = 0 \rightarrow 3 \text{ es raíz de } R.$$

39 ■■■ ¿Cuál debe ser el valor de k para que -2 sea raíz del polinomio:

$$x^3 - 5x^2 - 7x + k?$$

Justifica tu respuesta.

Para que -2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$$(-2)^3 - 5(-2)^2 - 7(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$$

40 ■■■ ¿Cuál es el resultado de multiplicar una fracción por su inversa?

Compruébalo con $\frac{x}{x+2}$ y su inversa.

El producto de una fracción por su inversa es igual a 1.

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x} = \frac{x(x+2)}{(x+2)x} = 1$$

41 ■■■ a) Simplifica esta expresión: $a^2 - (a+1)(a-1)$.

b) ¿Sabes cuál es el valor de $7500^2 - 7501 \cdot 7499$ sin utilizar la calculadora?

$$a) a^2 - (a+1)(a-1) = a^2 - (a^2 - 1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$$

b) $7500^2 - 7501 \cdot 7499 = 1$, según hemos comprobado en el apartado a).

42 ■■■ a) Simplifica la expresión $(a+1)^2 - (a-1)^2$.

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de $2501^2 - 2499^2$

$$a) (a+1)^2 - (a-1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$$

$$b) 2501^2 - 2499^2 = 4 \cdot 2500 = 10000$$

43 ■■■ Averigua cuál debe ser el valor de a , en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:

$$a) (3x+a)(3x-a) + 7 \text{ y } 9x^2 - 18 \quad b) (x-a)^2 + 2xa - 46 \text{ y } x^2 + 18$$

4 Soluciones a los ejercicios y problemas

a) $(3x + a)(3x - a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$

Si $9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$

b) $(x - a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$

Si $x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

PROFUNDIZA

44 ■■■ Opera y simplifica todo lo posible las siguientes expresiones:

a) $\frac{x}{x^2 - 1} : \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right)$ b) $\left(\frac{-4x}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2}{x^2+4}$

c) $1 - \frac{3}{x} : \left[(x+2) - \frac{x^2+1}{x} \right]$

a) $\frac{x}{x^2 - 1} : \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) = \frac{x}{x^2 - 1} : \left(\frac{3x - 3 - 2x - 2}{x^2 - 1} \right) = \frac{x}{x^2 - 1} : \frac{x-5}{x^2 - 1} =$
 $= \frac{x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x - 5)} = \frac{x}{x - 5}$

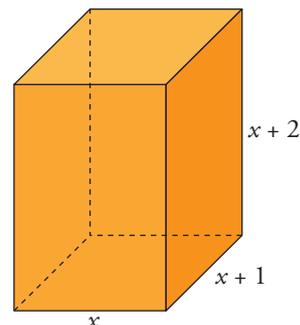
b) $\left(\frac{-4x}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} \right) \cdot \frac{x+2}{x^2+4} = \left(\frac{-4x + x + 2}{(x+2)^2} \right) \cdot \frac{x+2}{x^2+4} =$
 $= \frac{-3x + 2}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4} = \frac{(-3x+2)(x+2)}{(x+2)^2(x^2+4)} =$
 $= \frac{-3x+2}{(x+2)(x^2+4)}$

c) $1 - \frac{3}{x} : \left[(x+2) - \frac{x^2+1}{x} \right] = 1 - \frac{3}{x} : \left[\frac{x(x+2) - x^2 - 1}{x} \right] =$
 $= 1 - \frac{3}{x} : \left(\frac{x^2 + 2x - x^2 - 1}{x} \right) = 1 - \frac{3}{x} : \frac{2x-1}{x} =$
 $= 1 - \frac{3x}{x(2x-1)} = 1 - \frac{3}{2x-1} = \frac{2x-1-3}{2x-1} = \frac{2x-4}{2x-1}$

45 ■■■ Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números consecutivos.

Área: $2[(x+1)(x+2) + x(x+1) + x(x+2)] =$
 $= 2(x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) =$
 $= 2(3x^2 + 6x + 2) = 6x^2 + 12x + 4$

Volumen: $x(x+1)(x+2) = x(x^2 + 3x + 2) =$
 $= x^3 + 3x^2 + 2x$

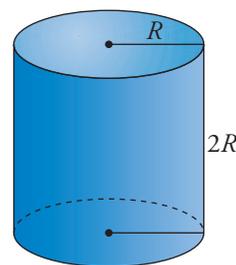


4 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 46** ■■■ Expresa algebraicamente el área total y el volumen de un cilindro cuya altura mide el doble del radio de la base.

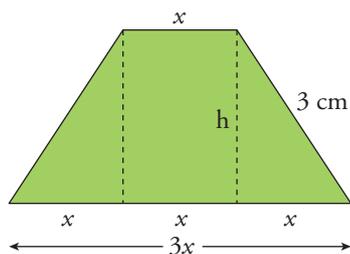
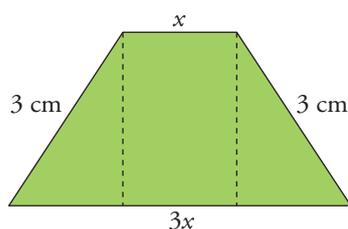
Área: $2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$

Volumen: $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$



- 47** ■■■ Expresa algebraicamente el área de este trapecio isósceles:

 Quizá te sea útil recordar el teorema de Pitágoras.



Altura: $h = \sqrt{9 - x^2}$

Área: $\frac{(3x + x)\sqrt{9 - x^2}}{2} = 2x\sqrt{9 - x^2}$