3 Soluciones a los ejercicios y problemas

PÁGINA 60

PRACTICA

Números reales

1 □□□ **a) Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:**

$$\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2;\ \sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) Racionales: $\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2$

Irracionales: $\sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$

b) El único entero es $\sqrt{49}$ (= 7).

c) $\frac{\pi}{2} < \sqrt[3]{5} < \frac{41}{13} < 3,2 < \sqrt{12} < \sqrt{49} < 53,\widehat{7}$

2 □□□ **Di cuáles de los siguientes números son irracionales:**

$$-\frac{3}{4};\quad 1,7\widehat{3};\quad \sqrt{3};\quad \pi;\quad \sqrt{9};\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad 3,7$$

Son irracionales $\sqrt{3}$, π y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3 □□□ **Indica cuáles de los siguientes números pueden expresarse como cociente de dos números enteros y cuáles no:**

$$21,5;\ \sqrt{7};\ 2,010010001\ldots;$$
$$\sqrt[3]{-8};\ 2+\sqrt{3};\ 0,\widehat{5};\ 2\pi-1$$

Los números que pueden expresarse como cociente de dos números enteros son los racionales, y los que no, irracionales:

Racionales: $21,5;\ \sqrt[3]{-8};\ 0,\widehat{5}$

Irracionales: $\sqrt{7};\ 2,010010001\ldots;\ 2+\sqrt{3};\ 2\pi-1$

4 □□□ **Clasifica estos números como naturales, enteros, racionales y/o reales:**

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{7}$	$7,23$
-2	π	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2,48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[3]{-1}$	1	$1,010203\ldots$

$\mathbb{N} \rightarrow$ 3; 0; 2; 18; 1

$\mathbb{Z} \rightarrow$ 3; 0; 2; 18; 1; –2; –4; –1; $\sqrt[3]{-1}$

$\mathbb{Q} \rightarrow$ 3; 0; 2; 18; 1; –2; –4; –1; $\sqrt[3]{-1}$; $-\frac{3}{4}$; 7,23; $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{9}$; 2,48

$\mathbb{R} \rightarrow$ 3; 0; 2; 18; 1; –2; –4; –1; $\sqrt[3]{-1}$; $-\frac{3}{4}$; 7,23; $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{9}$; 2,48;

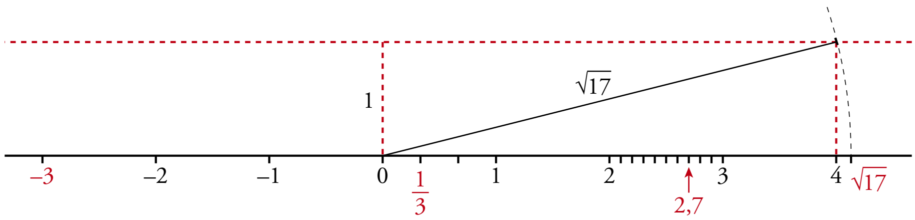
$\sqrt{2}$; π; $1 + \sqrt{2}$; 1,010203…

5 ■■□ **Representa en la recta real los siguientes números:**

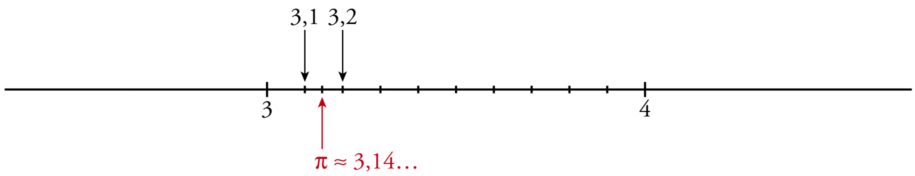
a) –3; 2,7; $\sqrt{17}$; $\frac{1}{3}$, de forma exacta.

b) π = 3,14…, de forma aproximada.

a) $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2}$



b)



6 ■□□ **a) Escribe un número racional comprendido entre $\frac{2}{3}$ y 1.**

b) Halla $\sqrt{5}$ con la calculadora y escribe dos números, uno mayor y otro menor que $\sqrt{5}$, que se diferencien con él en una diezmilésima.

a) Por ejemplo, $\left(\frac{2}{3} + 1\right) : 2 = \frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{6} = 0,8\widehat{3}$

b) $\sqrt{5}$ = 2,236067978…

Una diezmilésima es 0,0001.

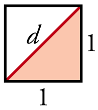
- Un número menor que $\sqrt{5}$ que se diferencie con él en una diezmilésima será:

  $\sqrt{5}$ – 0,0001 = 2,235967978…

- Un número mayor que $\sqrt{5}$ que se diferencie con él en una diezmilésima será:

  $\sqrt{5}$ + 0,0001 = 2,236167978…

7 **Calcula el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 e indica el tipo de número obtenido.**



Calculamos el valor de la diagonal d, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d^2 = 2 \rightarrow d = \sqrt{2}$$

La diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$ y es un número irracional.

Intervalos y semirrectas

8 **Considera los números siguientes:**

1; 2; 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1

a) Indica cuáles de ellos pertenecen al intervalo [2, 4).

b) ¿Y cuáles pertenecen al intervalo [2, 4]?

c) ¿Y cuáles al (2, +∞)?

a) Al intervalo [2, 4) pertenecen el 2; 2,3; 3; 3,9.

b) En el intervalo [2, 4] están el 2; 2,3; 3; 3,9; 4.

c) En el intervalo (2, +∞) se encuentran los números 2,3; 3; 3,9; 4; 4,1.

9 **Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:**

a) $0 < x < 1$

b) $x \leq -3$

c) $x > 0$

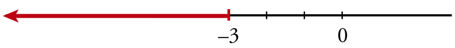
d) $-5 \leq x \leq 5$

e) $x > -5$

f) $1 \leq x < 3$

a) (0, 1)

b) (–∞, –3]



c) (0, +∞)

d) [–5, 5]

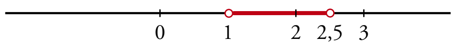
e) (–5, +∞)

f) [1, 3)

10 Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

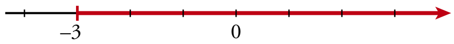
a) (1; 2,5) **b)** [–2, 3] **c)** [–7, 0]

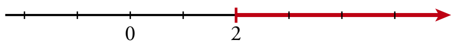
d) [–3, +∞) **e)** (2, +∞) **f)** (–5, 2]

a) $\{x \,/\, 1 < x < 2{,}5\}$ 

b) $\{x \,/\, -2 \le x \le 3\}$ 

c) $\{x \,/\, -7 \le x < 0\}$ 

d) $\{x \,/\, -3 \le x\}$ 

e) $\{x \,/\, x > 2\}$ 

f) $\{x \,/\, -5 < x \le 2\}$ 

11 Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:

a)  **b)** 

c)  **d)** 

	INTERVALO	DESIGUALDAD
a) 	[–2, 5)	$\{x \,/\, -2 \le x < 5\}$
b) 	[3, +∞)	$\{x \,/\, x \ge 3\}$
c) 	[2, 7]	$\{x \,/\, 2 \le x \le 7\}$
d) 	(–∞, –1)	$\{x \,/\, x < -1\}$

12 Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones dadas en cada caso:

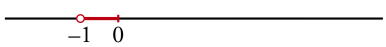
a) Menores o iguales que 3.

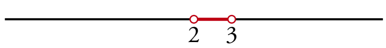
b) Comprendidos entre –1 y 0, incluyendo el 0, pero no el –1.

c) Mayores que 2, pero menores que 3.

d) Mayores que 5.

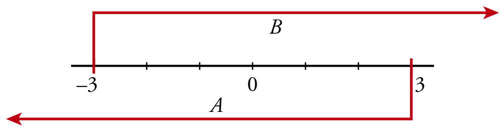
a) (–∞, 3] 

b) (–1, 0] 

c) (2, 3) 

d) (5, +∞) 

13 ■□□ **Representa en una misma recta las semirrectas $A = (-\infty, 3]$ y $B = [-3, +\infty)$. ¿Cuáles son los números que pertenecen a A y a B? Exprésalo como un intervalo.**

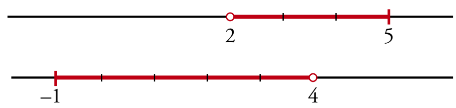


Los números que pertenecen a A y a B son los comprendidos entre –3 y 3, ambos incluidos; es decir [–3, 3].

14 ■□□ **Representa los intervalos $A = (2, 5]$ y $B = [-1, 4)$ y di si tienen puntos en común. Si es un intervalo, di cuál es.**

$A = (2\ ,5]$

$B = [-1\ ,4)$



Los puntos comunes a A y B están entre 2 y 4 $\rightarrow$ (2, 4)

15 ■■□ **Indica dos intervalos que tengan en común los puntos del intervalo [–1, 1].**

Por ejemplo: $A = (-\infty, 1]$ y $B = [-1, 5)$

PÁGINA 61

Potencias y raíces

16 ■□□ **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[3]{5^2}$	**b)** $\sqrt[5]{a^2}$	**c)** $\sqrt[8]{a^5}$	**d)** $\sqrt[3]{x}$
e) $\sqrt{a^{-1}}$	**f)** $\sqrt[4]{a^2}$	**g)** $\sqrt{a}$	**h)** $\sqrt{2}$

a) $5^{2/3}$	b) $a^{2/5}$	c) $a^{5/8}$	d) $x^{1/3}$
e) $a^{-1/2}$	f) $a^{2/4} = a^{1/2}$	g) $a^{1/2}$	h) $2^{1/2}$

17 ■□□ **Expresa en forma de raíz.**

a) $3^{2/5}$	**b)** $2^{3/4}$	**c)** $a^{1/3}$	**d)** $a^{1/2}$
e) $x^{1/4}$	**f)** $a^{3/2}$	**g)** $x^{-1/2}$	**h)** $x^{-3/2}$

a) $\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$	b) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$	c) $\sqrt[3]{a}$	d) $\sqrt{a}$
e) $\sqrt[4]{x}$	f) $\sqrt{a^3}$	g) $\sqrt{x^{-1}}$	h) $\sqrt{x^{-3}}$

18 Calcula.

a) $25^{1/2}$ **b)** $27^{1/3}$ **c)** $125^{2/3}$ **d)** $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ **f)** $16^{5/4}$ **g)** $49^{3/2}$ **h)** $8^{5/3}$

a) $25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5^{2/2} = 5$

b) $27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^{3/3} = 3$

c) $125^{2/3} = (5^3)^{2/3} = 5^{3 \cdot 2/3} = 5^2 = 25$

d) $81^{3/4} = (3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$

e) $9^{5/2} = (3^2)^{5/2} = 3^{2 \cdot 5/2} = 3^5 = 243$

f) $16^{5/4} = (2^4)^{5/4} = 2^{4 \cdot 5/4} = 2^5 = 32$

g) $49^{3/2} = (7^2)^{3/2} = 7^{2 \cdot 3/2} = 7^3 = 343$

h) $8^{5/3} = (2^3)^{5/3} = 2^{3 \cdot 5/3} = 2^5 = 32$

19 Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ **b)** $\sqrt[3]{k} = -2$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{3}{2}$ **d)** $\sqrt[k]{-125} = -5$

e) $\sqrt[3]{k} = -1$ **f)** $\sqrt[k]{\dfrac{49}{64}} = \dfrac{7}{8}$

a) $\sqrt[k]{3^5} = 3 \rightarrow k = 5$

b) $k = (-2)^3 \rightarrow k = -8$

c) $k = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \rightarrow k = \dfrac{81}{16}$

d) $\sqrt[k]{(-5)^3} = -5 \rightarrow k = 3$

e) $k = (-1)^3 \rightarrow k = -1$

f) $\sqrt[k]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \dfrac{7}{8} \rightarrow k = 2$

20 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt[5]{243}$ **c)** $\sqrt[7]{0}$

d) $\sqrt[4]{1}$ **e)** $\sqrt[3]{-1}$ **f)** $\sqrt{-1}$

g) $\sqrt[3]{-27}$ **h)** $\sqrt{144}$ **i)** $\sqrt[6]{15\,625}$

a) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ b) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$ c) $\sqrt[7]{0} = 0$

d) $\sqrt[4]{1} = 1$ e) $\sqrt[3]{-1} = -1$ f) $\sqrt{-1}$ no existe

g) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-(3)^3} = -3$ h) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$ i) $\sqrt[6]{15\,625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

21 Obtén con la calculadora.

a) $\sqrt[5]{9}$ **b)** $\sqrt[3]{-173}$ **c)** $\sqrt[4]{14^3}$

d) $\sqrt[4]{75,3}$ **e)** $\sqrt[6]{603}$ **f)** $\sqrt[3]{0,06^2}$

a) $\sqrt[5]{9} = 9^{1/5} \approx 1,55$

b) $\sqrt[3]{-173} \approx -5,57$

c) $\sqrt[4]{14^3} = 14^{3/4} \approx 7,24$

d) $\sqrt[4]{75,3} \approx 2,95$

e) $\sqrt[6]{603} \approx 2,91$

f) $\sqrt[3]{0,06^2} \approx 0,15$

22 Halla con la calculadora.

a) $28^{3/4}$ **b)** $8^{1/2}$ **c)** $0,02^{2/3}$

d) $0,8^{3/5}$ **e)** $12^{5/2}$ **f)** $3,5^{1/5}$

a) $28^{3/4} \approx 12,17$ b) $8^{1/2} \approx 2,83$ c) $0,02^{2/3} \approx 0,07$

d) $0,8^{3/5} \approx 0,87$ e) $12^{5/2} \approx 498,83$ f) $3,5^{1/5} \approx 1,28$

Radicales

23 Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ **b)** $\sqrt{625}$ **c)** $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ **e)** $\sqrt[6]{125}$ **f)** $\sqrt[5]{3^{15}}$

a) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt{625} = \sqrt{25^2} = 25$

c) $\sqrt[15]{2^{12}} = 2^{12/15} = 2^{4/5} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

d) $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = 7^{2/4} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

e) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{15/5} = 3^3 = 27$

24 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ **b)** $\sqrt[4]{a^{12}}$ **c)** $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2}$ **e)** $\sqrt[3]{a^6b^6}$ **f)** $\sqrt[6]{a^2b^4}$

a) $\sqrt[10]{a^8} = a^{8/10} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

b) $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12/4} = a^3$

c) $\sqrt[12]{a^3} = a^{3/12} = a^{1/4} = \sqrt[4]{a}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2} = \sqrt[8]{(ab)^2} = (ab)^{2/8} = (ab)^{1/4} = \sqrt[4]{ab}$

e) $\sqrt[3]{a^6b^6} = \sqrt[3]{(ab)^6} = (ab)^{6/3} = (ab)^2 = a^2b^2$

f) $\sqrt[6]{a^2b^4} = (a^2b^4)^{1/6} = a^{2/6} \cdot b^{4/6} = a^{1/3} \cdot b^{2/3} = \sqrt[3]{ab^2}$

25 □□□ **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 8} = \sqrt{400} = 20$

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3} = \sqrt{a \cdot a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$

26 □□□ **Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $\sqrt{28}$ **c)** $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{200}$ **f)** $\sqrt{300}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} = \sqrt{7 \cdot 2^2} = 2\sqrt{7}$

c) $\sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = 4\sqrt[4]{4}$

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{200} = \sqrt{5^2 \cdot 2^3} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

f) $\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$

27 □□□ **Reduce a un solo radical.**

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ **e)** $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ **f)** $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

a) $\sqrt{\sqrt{13}} = \sqrt[4]{13}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}} = \sqrt[15]{15}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[12]{2^5}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}} = \sqrt[4]{3^3}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}} = \sqrt[10]{11}$

28 □□□ **Calcula y simplifica en cada caso:**

a) $(\sqrt{2})^{10}$ **b)** $(\sqrt[3]{2})^4$ **c)** $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ **e)** $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ **f)** $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

a) $(\sqrt{2})^{10} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$ b) $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $(\sqrt[4]{3^2})^8 = \sqrt[4]{3^{16}} = 3^4 = 81$ d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$

e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10} = \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt{2^5}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6 = \sqrt[6]{2^6} = 2$

29 □□□ **Resuelto en el libro de texto.**

30 □□□ **Expresa como un solo radical.**

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ **b)** $5\sqrt{48} + \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$ **d)** $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} - 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 0$

b) $5\sqrt{48} + \sqrt{12} = 5\sqrt{2^4 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7} = 3\sqrt{2^2 \cdot 7} - 5\sqrt{7} = 3 \cdot 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = 6\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = \sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$

31 □□□ **Efectúa.**

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ **d)** $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 2\sqrt{2^3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 2^3} - 7\sqrt{3^2 \cdot 2} =$

$= 2 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - 7 \cdot 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 21\sqrt{2} =$

$= (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$

$= (2 + 5 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8} = \sqrt{2^5} + 3\sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2^3} = 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (3 + 3 - 6)\sqrt{2} = 0$

32 □□□ **Suprime el radical del denominador y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ **c)** $\dfrac{6}{\sqrt{12}}$ **d)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{12}} = \dfrac{6\sqrt{12}}{12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

33 **Suprime el radical del denominador.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^3}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}} = \dfrac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

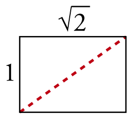
c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

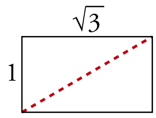
d) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{5\sqrt[4]{8}}{2}$

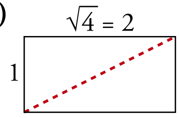
PÁGINA 62

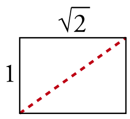
PIENSA Y RESUELVE

34 **Calcula el valor de la diagonal en cada caso e indica si es un número racional o irracional:**

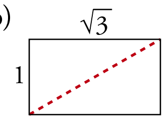
a)


b)


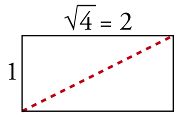
c)


a)


$\text{diagonal}^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3 \rightarrow \text{diagonal} = \sqrt{3}$ (n.º irracional)

b)


$\text{diagonal}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \rightarrow \text{diagonal} = \sqrt{4} = 2$ (n.º racional)

c)


$\text{diagonal}^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \rightarrow \text{diagonal} = \sqrt{5}$ (n.º irracional)

35 **¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?**

$$\sqrt[3]{-20};\quad \sqrt[6]{0,12};\quad \sqrt{-1};\quad \sqrt[5]{241};\quad \sqrt[4]{-16}$$

No existen las raíces de índice par y radicando negativo: $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$ no existen.

36 **Resuelto en el libro de texto.**

37 Expresa como potencia única.

a) $(4^{1/3}) \cdot (\sqrt{2})$ **b)** $(\sqrt[3]{25}) : (5^{1/2})$

c) $(\sqrt{3}) \cdot (9^{1/3})$ **d)** $(27^{2/3}) \cdot (\sqrt[7]{9})$

a) $(4^{1/3}) \cdot (\sqrt{2}) = (2^2)^{1/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{2/3 + 1/2} = 2^{7/6}$

b) $(\sqrt[3]{25}) : (5^{1/2}) = (\sqrt[3]{5^2}) : 5^{1/2} = 5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{2/3 - 1/2} = 5^{1/6}$

c) $(\sqrt{3}) \cdot (9^{1/3}) = (3^{1/2}) \cdot (3^2)^{1/3} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/3} = 3^{1/2 + 2/3} = 3^{7/6}$

d) $(27^{2/3}) \cdot (\sqrt[7]{9}) = (3^3)^{2/3} \cdot \sqrt[7]{3^2} = 3^2 \cdot 3^{2/7} = 3^{2 + 2/7} = 3^{16/7}$

38 Expresa como potencia única.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ **b)** $2\sqrt[3]{4}$ **c)** $a\sqrt{a}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ **f)** $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{1/2 + 1/3} = 3^{5/6}$

b) $2\sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot 2^{2/3} = 2^{1 + 2/3} = 2^{5/3}$

c) $a\sqrt{a} = a \cdot a^{1/2} = a^{3/2}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2^{3/2}}{2^{2/3}} = 2^{3/2 - 2/3} = 2^{5/6}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \dfrac{a^{8/3}}{a^2} = a^{8/3 - 2} = a^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{2/3} \cdot a^{1/6} = a^{2/3 + 1/6} = a^{5/6}$

39 Expresa en forma exponencial.

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3$ **b)** $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

d) $(\sqrt[4]{a})^3$ **e)** $(\sqrt[4]{a^2})^2$ **f)** $(\sqrt{a})^5$

a) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = (a^{2/5})^3 = a^{6/5}$

b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x} = x^{1/12}$

d) $(\sqrt[4]{a})^3 = (a^{1/4})^3 = a^{3/4}$

e) $(\sqrt[4]{a^2})^2 = (a^{2/4})^2 = a$

f) $(\sqrt{a})^5 = (a^{1/2})^5 = a^{5/2}$

40 **Indica si el número que se obtiene en cada caso es racional o irracional:**

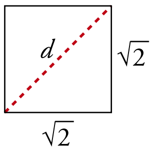
a) La diagonal de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm.

b) El área de un círculo de radio 2 cm.

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm.

d) La diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 1 cm.

a) La diagonal de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm. $\rightarrow$ Racional

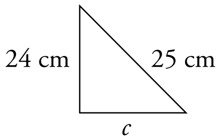


$d^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4 \rightarrow d = \sqrt{4} = 2$

b) El área de un círculo de radio 2 cm. $\rightarrow$ Irracional

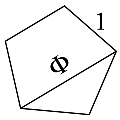
Área $= \pi \cdot r^2 \rightarrow$ Área $= \pi \cdot 2^2 = 4(\pi)$, n.º irracional

c) El cateto del triángulo rectángulo de lados 24 cm y 25 cm. $\rightarrow$ Racional



$25^2 = 24^2 + c^2 \rightarrow 625 = 576 + c^2 \rightarrow c^2 = 49 \rightarrow c = 7$

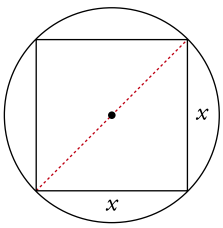
d) La diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 1 cm. $\rightarrow$ Irracional



La diagonal de un pentágono regular de lado 1 es el número $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, n.º irracional.

41 **Calcula la longitud del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.**

El resultado obtenido, ¿se puede poner en forma de fracción?



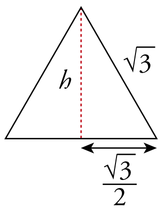
La diagonal del cuadrado es $2r = 2 \cdot 6 = 12$ cm.

Llamando x al lado del cuadrado y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura, obtenemos:

$x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow x^2 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72}$ cm

El resultado obrenido, $\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$ cm, es un número irracional; por tanto, no se puede poner en forma de fracción.

42 ■■■ **Halla el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide $\sqrt{3}$ cm. Expresa los cálculos con radicales.**



Llamamos h a la altura del triángulo y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura:

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \rightarrow h^2 + \frac{3}{4} = 3 \rightarrow h^2 = 3 - \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow h^2 = \frac{9}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área del triángulo} \rightarrow A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

43 ■□□ **Demuestra, con ayuda de la calculadora, que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es distinto de $\sqrt{3+2}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}14626437\ldots \\ \\ \sqrt{3+2} = \sqrt{5} = 2{,}236067978\ldots \end{array}\right\} \sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \sqrt{3+2}$$

44 ■■■ **Averigua para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x-5}$ **b)** $\sqrt{5-x}$

c) $\sqrt{x^2+1}$ **d)** $\sqrt{-x}$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$ **f)** $\sqrt{x(3-x)}$

a) $\sqrt{x-5}$

Puede efectuarse siempre que x valga 5 o más $\rightarrow$ $[5, +\infty)$

b) $\sqrt{5-x}$

La raíz se puede efectuar siempre que x valga 5 o menos $\rightarrow$ $(-\infty, 5]$

c) $\sqrt{x^2+1}$

$x^2 + 1$ siempre es positivo (cualquier número elevado al cuadrado y sumado con otro número será mayor que 0).

Luego la raíz se podrá efectuar si x está en $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

d) $\sqrt{-x}$

Puede efectuarse siempre que x sea 0 o negativo $\rightarrow$ $(-\infty, 0]$

e) $\sqrt{(1+x)(2-x)}$

La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es 0 o positivo. Esto ocurrirá cuado uno de los dos factores es cero, ambos son positivos o ambos son negativos. Es decir, si $x \geq -1$ o si $x \leq 2$:

$[-1, 2]$ 

f) $\sqrt{x(3-x)}$

La raíz cuadrada puede efectuarse cuando el radicando es cero o positivo. Esto ocurre cuando uno de los factores es cero, ambos son negativos o ambos positivos. Es decir, si $x \geq 0$ o si $x \leq 3$:

$[0, 3]$ 

45 **Resuelto en el libro de texto.**

46 **Simplifica los radicales que puedas e indica en cada caso cuál es mayor:**

a) $\sqrt[6]{9}$ **y** $\sqrt[3]{2}$ **b)** $\sqrt[8]{121}$ **y** $\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[6]{625}$ **y** $\sqrt[3]{25}$ **d)** $\sqrt{5}$ **y** $\sqrt[4]{9}$

a) $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = 3^{2/6} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

$3 > 2 \rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[6]{9} > \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[8]{121}$ y $\sqrt[4]{7}$

$\sqrt[8]{121} = \sqrt[8]{11^2} = 11^{2/8} = 11^{1/4} = \sqrt[4]{11}$

$11 > 7 \rightarrow \sqrt[4]{11} > \sqrt[4]{7} \rightarrow \sqrt[8]{121} > \sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[6]{625}$ y $\sqrt[3]{25}$

$\sqrt[6]{625} = \sqrt[6]{25^2} = 25^{2/6} = 25^{1/3} = \sqrt[3]{25}$

En este caso, ambas raíces coinciden.

d) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{9}$

$\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

Como $5 > 3 \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt[4]{9}$

47 **Ordena de menor a mayor los siguientes radicales simplificándolos previamente:**

$$\sqrt[6]{121} \qquad \sqrt[12]{16} \qquad \sqrt[3]{3} \qquad \sqrt[9]{125}$$

Empezamos por simplificar los radicales que sean posibles:

$\sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{11^2} = 11^{2/6} = 11^{1/3} = \sqrt[3]{11}$

$\sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = 2^{4/12} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[9]{125} = \sqrt[9]{5^3} = 5^{3/9} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$

Ordenar los radicales dados, equivale a ordenar:

$$\sqrt[3]{11}, \qquad \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[3]{3}, \qquad \sqrt[3]{5}$$

Todos tienen el mismo índice; por tanto, para ordenarlos, basta ordenar los radicandos:

$$2 < 3 < 5 < 11 \;\rightarrow\; \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{11} \;\rightarrow\; \sqrt[12]{16} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[9]{125} < \sqrt[6]{121}$$

48 **Comprueba que los números $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3 = 0$.**

Para comprobar que los números dados son soluciones de dicha ecuación, basta sustituir x, por cada uno de ellos en la ecuación:

- Si $x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; (\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \;\rightarrow$ Es solución.
- Si $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; (-\sqrt{3})^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \;\rightarrow$ Es solución.