# 2 SUCESIONES

## Página 51

## REFLEXIONA Y RESUELVE

### ¿Cuántas parejas de conejos?

**¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?**

Razonando del modo que se propone, llegamos a que el número de parejas, mes a mes, es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).

### La sucesión de Fibonacci y el número $\Phi$

**Si dividimos cada dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, obtenemos:**

$$\mathbf{1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{21}{13}$$

$$1 \quad 2 \quad 1{,}5 \quad 1{,}66 \quad 1{,}6 \quad 1{,}625 \quad 1{,}615$$

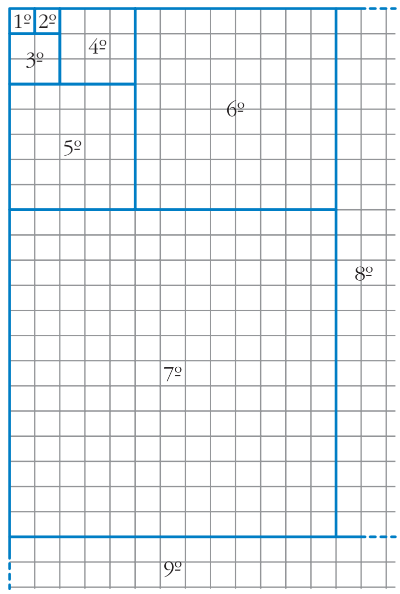
**Comprueba, calculando nuevos cocientes, que el número al que se aproximan es el número áureo.**

$\frac{55}{34} = 1{,}61764\ldots$; $\frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots$; $\frac{144}{89} = 1{,}61797\ldots$

Se aproximan al número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

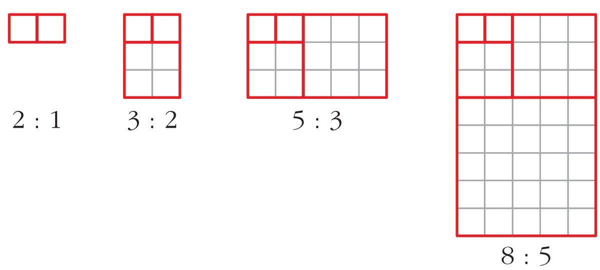
## Una representación gráfica

**Observa esta composición hecha con cuadrados:**




**El lado de los cuadrados primero y segundo es 1. A partir del tercero, el lado de cada uno de los siguientes cuadrados que se van formando es igual a la suma de los lados de los dos que le preceden. ¿Cuál es el lado del 8º? ¿Y el del 9º?**

**Observa también los rectángulos que se forman sucesivamente:**




**Los cocientes entre sus dimensiones forman la sucesión que estudiamos en el apartado anterior. Se aproximan, por tanto, al número Φ. Esto quiere decir que estos rectángulos se parecen, cada vez más, a rectángulos áureos.**

**Compruébalo para los cuatro siguientes rectángulos:**

**13 : 8 21 : 13 34 : 21 55 : 34**

El lado del 8.° cuadrado es 21 y el lado del 9.° cuadrado es 34.

$$\frac{13}{8} = 1{,}625; \quad \frac{21}{13} = 1{,}615; \quad \frac{34}{21} = 1{,}619\ldots; \quad \frac{55}{34} = 1{,}617\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

## Página 52

**1. Di el criterio por el que se forman las sucesiones siguientes y añade dos términos a cada una:**

**a) 3, 8, 13, 18, 23, …** **b) 1, 8, 27, 64, 125, …**

**c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …** **d) 8; 4; 2; 1; 0,5; …**

**e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …** **f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …**

**g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …** **h) 20, 13, 6, –1, –8, …**

a) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole 5 al anterior: $a_6 = 28$, $a_7 = 33$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa: $b_6 = 216$, $b_7 = 343$.

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 10 el anterior:

$c_6 = 100\,000$, $c_7 = 1\,000\,000$.

d) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ (dividiendo entre 2) el anterior: $d_6 = 0{,}25$, $d_7 = 0{,}125$.

e) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $e_7 = 29$, $e_8 = 47$.

f) Cada término, a partir del tercero, se obtiene restando los dos anteriores: $f_7 = 16$, $f_8 = -25$.

g) Cada término es el número del lugar que ocupa, con signo positivo si es impar, y negativo si es par: $g_7 = 7$, $g_8 = -8$.

h) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restándole 7 al anterior: $h_6 = -15$, $h_7 = -22$.

## Página 53

**2. Forma una sucesión recurrente, $a_n$, con estos datos:**

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

**3. Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen como término general:**

$a_n = 3 + 5(n-1)$ $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $c_n = (-1)^n\, 2^n$

$d_n = (n-1)(n-2)$ $e_n = n^2 + (-1)^n\, n^2$

$a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 18$ $b_1 = 3$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{3}{8}$

$c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -8$, $c_4 = 16$ $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 6$

$e_1 = 0$, $e_2 = 8$, $e_3 = 0$, $e_4 = 32$

**4. Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$.**

Si tomamos, por ejemplo, $a_1 = 1$, entonces quedaría: $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 3 = 6$, $a_4 = 6 + 4 = 10$, $a_5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = 15 + 6 = 21$, $a_7 = 21 + 7 = 28$, …

**5. Da el término general de las sucesiones siguientes que no sean recurrentes:**

**a) 3, 8, 13, 18, 23, …** **b) 1, 8, 27, 64, 125, …**

**c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …** **d) 8, 4, 2, 1, …**

**e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …** **f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …**

**g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …** **h) 20, 13, 6, –1, –8, …**

a) $a_n = 3 + (n-1) \cdot 5$ b) $b_n = n^3$

c) $c_n = 10^{n-1}$ d) $d_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Es recurrente f) Es recurrente

g) $g_n = (-1)^{n-1} \cdot n$ h) $h_n = 20 - 7 \cdot (n-1)$

## Página 54

**1. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones aritméticas*? En cada una de ellas di su diferencia y añade dos términos más:**

**a) 3, 7, 11, 15, 19, …** **b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …**

**c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …** **d) 10, 7, 4, 1, –2, …**

**e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; …** **f) –18; –3,1; 11,8; 26,7; 41,6; …**

a) Es una progresión aritmética con $d = 4$; $a_6 = 23$, $a_7 = 27$.

b) No es una progresión aritmética.

c) No es una progresión aritmética.

d) Es una progresión aritmética con $d = -3$; $d_6 = -5$, $d_7 = -8$.

e) Es una progresión aritmética con $d = 1{,}6$; $e_6 = 9{,}4$; $e_7 = 7{,}8$.

f) Es una progresión aritmética con $d = 14{,}9$; $f_6 = 56{,}5$; $f_7 = 71{,}4$.

**2. En la sucesión 1a), halla el término $a_{20}$ y la suma de los 20 primeros términos.**

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$$

**3.** **En la sucesión 1d), halla el término $d_{40}$ y la suma de los 40 primeros términos.**

$d_{40} = d_1 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$

$S_{40} = \dfrac{(d_1 + d_{40}) \cdot 40}{2} = \dfrac{(10 - 107) \cdot 40}{2} = -1\,940$

**4.** **En la sucesión 1e), halla el término $e_{100}$ y la suma de los 100 primeros términos.**

$e_{100} = e_1 + 99 \cdot (-1{,}6) = 17{,}4 - 158{,}4 = -141$

$S_{100} = \dfrac{(e_1 + e_{100}) \cdot 100}{2} = \dfrac{(17{,}4 - 141) \cdot 100}{2} = -6\,180$

**5.** **En la sucesión 1f), halla los términos $f_8, f_{17}$ y la suma $f_8 + f_9 + \dots + f_{16} + f_{17}$.**

$f_8 = f_1 + 7 \cdot 14{,}9 = -18 + 104{,}3 = 86{,}3$

$f_{17} = f_1 + 16 \cdot 14{,}9 = -18 + 238{,}4 = 220{,}4$

En la suma pedida hay 10 sumandos.

$S = \dfrac{(f_1 + f_{17}) \cdot 10}{2} = \dfrac{(86{,}3 + 220{,}4) \cdot 10}{2} = 1\,533{,}5$

## Página 55

**6.** **¿Cuáles de las siguientes sucesiones son *progresiones geométricas*? En cada una de ellas di su razón y añade dos términos más:**

**a) 1, 3, 9, 27, 81, …**

**b) 100; 50; 25; 12,5; …**

**c) 12, 12, 12, 12, 12, …**

**d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, …**

**e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …**

a) Es una progresión geométrica con $r = 3$; $a_6 = 243$, $a_7 = 729$.

b) Es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{2}$; $b_5 = 6{,}25$, $b_6 = 3{,}125$.

c) Es una progresión geométrica con $r = 1$; $c_6 = 12$, $c_7 = 12$.

d) Es una progresión geométrica con $r = -1$; $d_7 = 5$, $d_8 = -5$.

e) Es una progresión geométrica con $r = -\dfrac{1}{3}$; $e_6 = -\dfrac{10}{27}$, $e_7 = \dfrac{10}{81}$.

**7.** **Calcula la suma de los 10 primeros términos de cada una de las progresiones geométricas del ejercicio anterior.**

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 19\,683$

$S_{10} = \dfrac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$

b) $b_{10} = b_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{100}{512} = \frac{25}{128}$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} \approx 199{,}805$$

c) $c_{10} = 12$; $S_{10} = 12 \cdot 10 = 120$

d) $d_{10} = -5$; $S_{10} = 0$

e) $e_{10} = e_1 \cdot r^9 = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{-90}{19\,683} = \frac{-10}{2\,187}$

$$S_{10} = \frac{e_{10} \cdot r - e_1}{r - 1} = \frac{\frac{10}{6\,561} - 90}{-\frac{1}{3} - 1} \approx 67{,}499$$

**8. ¿En cuáles de las progresiones geométricas del ejercicio anterior puedes calcular la suma de sus infinitos términos? Hállala.**

Podemos calcular la suma de sus infinitos términos en las progresiones geométricas con $|r| < 1$:

b) $S_\infty = \frac{b_1}{1 - r} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$

e) $S_\infty = \frac{e_1}{1 - r} = \frac{90}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{90}{\frac{4}{3}} = 67{,}5$

## Página 56

**9. Calcula: $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$**

$$\frac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$$

**10. Calcula: $50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$**

$$(1^2 + \ldots + 60^2) - (1^2 + \ldots + 49^2) = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} =$$

$$= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385$$

**11. Calcula: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3$**

$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$$

**12. Calcula: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$**

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$$

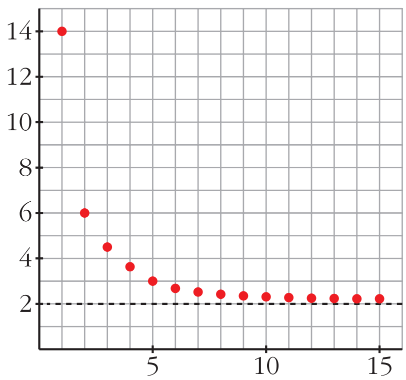
$$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$$

$$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) =$$

$$= 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3\,025 = 24\,200$$

## Página 57

**1. Representa la sucesión $a_n = \dfrac{4n + 10}{2n - 1}$ y asígnale un valor a su límite.**



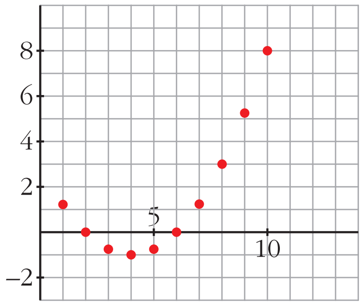

$a_1 = 14$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4{,}4$; $a_4 \approx 3{,}71$;

$a_5 \approx 3{,}33, \ldots, a_{10} \approx 2{,}63, \ldots$;

$a_{100} \approx 2{,}06; \ldots; a_{1\,000} \approx 2{,}006, \ldots$

$\text{lím } a_n = 2$

**2. Representa la sucesión $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ y asigna un valor a su límite.**




$b_1 = 1{,}25$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}75$;

$b_4 = -1$; $b_5 = -0{,}75$; $b_6 = 0$;

$b_7 = 1{,}25$; $b_8 = 3$; $b_9 = 5{,}25$; $b_{10} = 8, \ldots,$

$b_{100} = 2\,303, \ldots$

$\text{lím } b_n = +\infty$

## Página 59

**3. Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:**

**a)** $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$

**c)** $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83, \dots$ $\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987, \dots$ $\lim b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 10^3, \dots$ $\lim c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999, \dots$ $\lim d_n = 5$

**4. Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:**

**a)** $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$

**c)** $c_n = (-1)^n\, n$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002, \dots$ $\lim a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962, \dots$

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3, \dots$ $c_{1\,000} = 1\,000$, $c_{1\,001} = -1\,001, \dots$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5; \dots$; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196, \dots$ $\lim d_n = 0$.

## Página 61

**1. Obtén los ocho primeros valores de $a_n$ (términos de la sucesión) y de $S_n$ (sumas parciales) en cada una de las progresiones siguientes. Calcula en cada una el *lím* $S_n$:**

**a) 125, 50, 20, …** **b) 125, –50, 20, …** **c) 17, –17, 17, …**

**d) 17, 17, 17, …** **e) 10; 12; 14,4; …** **f) 10; –12; 14,4; …**

a) $a_1 = 125$, $a_2 = 50$, $a_3 = 20$, $a_4 = 8$, $a_5 = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$; $a_6 = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$; $a_7 = \dfrac{64}{125} = 0{,}512$;

$a_8 = \dfrac{128}{625} = 0{,}2048$.

$S_1 = 125;\ S_2 = 175;\ S_3 = 195;\ S_4 = 203;\ S_5 = 206{,}2;\ S_6 = 207{,}48;\ S_7 = 207{,}992;$

$S_8 = 208{,}1968.$

Como $r = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 < 1;\ \text{lím}\ S_n = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{125}{1-\dfrac{2}{5}} = \dfrac{625}{3} = 208{,}\widehat{3}$

b) $b_1 = 125;\ b_2 = -50;\ b_3 = 20;\ b_4 = -8;\ b_5 = 3{,}2;\ b_6 = -1{,}28;\ b_7 = 0{,}512;\ b_8 = -0{,}2048.$

$S_1 = 125;\ S_2 = 75;\ S_3 = 95;\ S_4 = 87;\ S_5 = 90{,}2;\ S_6 = 88{,}92;\ S_7 = 89{,}432;\ S_8 = 89{,}2272.$

Como $r = -\dfrac{2}{5} = -0{,}4 < 1;\ \text{lím}\ S_n = \dfrac{b_1}{1-r} = \dfrac{125}{1+\dfrac{2}{5}} = \dfrac{625}{7} \approx 89{,}286$

c) $c_1 = 17;\ c_2 = -17;\ c_3 = 17;\ c_4 = -17;\ c_5 = 17;\ c_6 = -17;\ c_7 = 17;\ c_8 = -17.$

$S_1 = 17;\ S_2 = 0;\ S_3 = 17;\ S_4 = 0;\ S_5 = 17;\ S_6 = 0;\ S_7 = 17;\ S_8 = 0.$

$S_n$ no tiene límite.

d) $d_1 = 17;\ d_2 = 17;\ d_3 = 17;\ d_4 = 17;\ d_5 = 17;\ d_6 = 17;\ d_7 = 17;\ d_8 = 17.$

$S_1 = 17;\ S_2 = 34;\ S_3 = 51;\ S_4 = 68;\ S_5 = 85;\ S_6 = 102;\ S_7 = 119;\ S_8 = 136.$

$\text{lím}\ S_n = +\infty.$

e) $e_1 = 10;\ e_2 = 12;\ e_3 = 14{,}4;\ e_4 = 17{,}28;\ e_5 = 20{,}736;\ e_6 = 24{,}8832;\ e_7 = 29{,}85984;$

$e_8 = 35{,}831808.$

$S_1 = 10;\ S_2 = 22;\ S_3 = 36{,}4;\ S_4 = 53{,}68;\ S_5 = 74{,}416;\ S_6 = 99{,}2992;\ S_7 = 129{,}15904;$

$S_8 = 164{,}99084.$

Como $r = 1{,}2 > 1;\ \text{lím}\ S_n = +\infty.$

f) $f_1 = 10;\ f_2 = -12;\ f_3 = 14{,}4;\ f_4 = -17{,}28;\ f_5 = 20{,}736;\ f_6 = -24{,}8832;\ f_7 = 29{,}85984;$

$f_8 = -35{,}831808.$

$S_1 = 10;\ S_2 = -2;\ S_3 = 12{,}4;\ S_4 = -4{,}88;\ S_5 = 15{,}856;\ S_6 = -9{,}0272;\ S_7 = 20{,}83264;$

$S_8 = -14{,}999168.$

$S_n$ no tiene límite.

## Página 64

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

**PARA PRACTICAR**

### Criterio para formar sucesiones

**1** **Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:**

**a)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

**b)** $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \ldots$

**c)** $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$

**d)** $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$

**e)** $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6}, \; a_7 = \frac{1}{7}, \; a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}$, $a_7 = \sqrt{7}$, $a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

**2** **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:**

**a)** $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$

**b)** $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

**c)** $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

**d)** $d_n = 2^{-n}$

**e)** $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

**f)** $f_n = \frac{(-1)^n n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{8}{3}$; $b_4 = \frac{15}{4}$; $b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \frac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \frac{11}{5}$; $c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}$; $d_2 = \frac{1}{4}$; $d_3 = \frac{1}{8}$; $d_4 = \frac{1}{16}$; $d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

**3 Escribe el término general de estas sucesiones:**

**a)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **b)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

**c)** $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \ldots$ **d) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …**

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$ b) $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ d) $d_n = 5 + \dfrac{1}{10^n}$

**4 Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:**

**a)** $a_1 = 0$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

**b)** $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \ldots$ b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \ldots$

**5 Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

**a) 4, 7, 3, –4, –7, …** **b)** $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

## Progresiones aritméticas

**6 De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

**a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; …** **b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …**

**c) 1, 2, 4, 7, 11, …** **d) 14, 13, 11, 8, 4, …**

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

**7** **De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:**

**a)** $a_n = 3n$ **b)** $b_n = 5n - 4$

**c)** $c_n = \frac{1}{n}$ **d)** $d_n = \frac{8 - 3n}{4}$

**e)** $e_n = 5 + \frac{n}{2}$ **f)** $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n - 1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n - 1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8 - 3n}{4} - \frac{8 - 3(n - 1)}{4} = \frac{8 - 3n - 8 + 3n - 3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n - 1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

**8** **Calcula los términos $a_{10}$ y $a_{100}$ de las siguientes progresiones aritméticas:**

**a)** $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

**b)** $2, -3, -8, -13, -18, \ldots$

**c)** $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

**9** **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

**a) 3, 6, 9, 12, 15, …** **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

**c)** $\boldsymbol{c_n = 4n - 2}$ **d)** $\boldsymbol{d_n = \frac{1 - 2n}{2}}$

a) $a_1 = 3$; $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5$; $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2$; $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

## Progresiones geométricas

**10** **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.**

**a) 32, 16, 8, 4, 2, …** **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

**c) 1, 4, 9, 16, 25, …** **d)** $\boldsymbol{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}}$**, …**

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001$; $c_7 = 0{,}000001$; $c_8 = 0{,}0000001$; $c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8$; $d_7 = 8\sqrt{2}$; $d_8 = 16$; $d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

**11** **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

**a)** $\boldsymbol{a_1 = 32,\ r = \frac{1}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{a_1 = 10,\ r = \frac{1}{10}}$

**c)** $\boldsymbol{a_1 = 2^{-10},\ r = 2}$ **d)** $\boldsymbol{a_1 = -5,\ r = -\frac{1}{4}}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64$ $\quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9}$ $\quad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{10}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$

No se puede calcular $S_\infty$ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$ $\quad S_\infty = \dfrac{-5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

## Página 65

### Suma de potencias

**12** **a) Demuestra que:**

$$\boldsymbol{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)}$$

**b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.**

**c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.**

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 =$

$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) =$

$$= 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

**13** **Halla la suma siguiente:**

$$\mathbf{21^3 + 22^3 + 23^3 + \dots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3}$$

$21^3 + \dots + 40^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3 + 21^3 + \dots + 40^3) - (1^3 + \dots + 20^3) =$

$$= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300$$

## Límite de una sucesión

**14** **Calcula los términos $a_{10}$, $a_{100}$ y $a_{1\,000}$, en cada sucesión e indica cuál es su límite:**

**a)** $a_n = \dfrac{1}{n-1}$

**b)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

**c)** $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$

**d)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $a_{10} = 2{,}5$; $a_{100} = 2{,}05$; $a_{1\,000} = 2{,}005$

$\text{lím } a_n = 2$

c) $a_{10} = -0{,}5$; $a_{100} = -0{,}95$; $a_{1\,000} = -0{,}995$

$\text{lím } a_n = -1$

d) $a_{10} = -6{,}7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$\text{lím } a_n = -\infty$

**15** **Halla algunos términos muy avanzados de las siguientes sucesiones e indica cuál es su límite:**

**a)** $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = 100 - n$

**c)** $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **d)** $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90$; $b_{100} = 0$; $b_{1\,000} = -900$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0,63$; $c_{100} \approx 0,9603$; $c_{1\,000} \approx 0,996$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} \approx 0,476$; $d_{100} \approx 0,498$; $d_{1\,000} \approx 0,4998$

$\text{lím } d_n = 0,5 = \dfrac{1}{2}$

**16** **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

**a)** $a_n = 3n^2 - 10$ **b)** $b_n = 3n - n^2$

**c)** $c_n = 10 - 5n + n^2$ **d)** $d_n = (1 - 2n)^2$

**e)** $e_n = (4 - n)^3$ **f)** $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290$; $a_{100} = 29\,990$; $a_{1\,000} = 2\,999\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70$; $b_{100} = -9\,700$; $b_{1\,000} = -997\,000$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60$; $c_{100} = 9\,510$; $c_{1\,000} = 995\,010$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361$; $d_{100} = 39\,601$; $d_{1\,000} = 3\,996\,001$

$\text{lím } d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216$; $e_{100} = -884\,736$; $e_{1\,000} = -988\,047\,936$

$\text{lím } e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143$; $f_{100} = -10\,403$; $f_{1\,000} = -1\,004\,003$

$\text{lím } f_n = -\infty$

**17** **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

**a)** $a_n = \dfrac{1}{3n}$ **b)** $b_n = \dfrac{5}{3n+2}$

**c)** $c_n = \dfrac{3}{n+1}$ **d)** $d_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

**e)** $e_n = \dfrac{1}{n^2}$ **f)** $f_n = \dfrac{-100}{n^2}$

**g)** $g_n = (-1)^n$ **h)** $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

a) $a_{10} = 0{,}0\widehat{3}$; $a_{100} = 0{,}00\widehat{3}$; $a_{1\,000} = 0{,}000\widehat{3}$

$\lim a_n = 0$

b) $b_{10} = 0{,}15625$; $b_{100} = 0{,}01656$; $b_{1\,000} = 0{,}00167$

$\lim b_n = 0$

c) $c_{10} = 0{,}\widehat{27}$; $c_{100} = 0{,}\widehat{0297}$; $c_{1\,000} = 0{,}\widehat{002997}$

$\lim c_n = 0$

d) $d_{10} = 0{,}297$; $d_{100} = 0{,}029997$; $d_{1\,000} = 0{,}002999997$

$\lim d_n = 0$

e) $e_{10} = 0{,}01$; $e_{100} = 0{,}0001$; $e_{1\,000} = 0{,}000001$

$\lim e_n = 0$

f) $f_{10} = -1$; $f_{100} = -0{,}01$; $f_{1\,000} = -0{,}0001$

$\lim f_n = 0$

g) $g_{10} = 1$; $g_{101} = -1$; $g_{1\,000} = 1$; $g_{10\,001} = -1$

La sucesión no tiene límite.

h) $h_{10} = 0{,}0909$; $h_{100} = 0{,}0099$; $h_{1\,000} = 0{,}000999$; $h_{1\,001} = -0{,}000999$

$\lim h_n = 0$

## PARA RESOLVER

**18** **Calcula el 15.° término en la siguiente progresión:**

**3; 2,7; 2,4; 2,1; …**

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0{,}3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0{,}3 \cdot 14 = 3 - 4{,}2 = -1{,}2$.

**19** **Halla el cuarto término de una progresión aritmética en la que $d = 3$ y $a_{20} = 100$.**

$a_{20} = a_4 + 16d \;\rightarrow\; a_4 = a_{20} - 16d = 100 - 16 \cdot 3 = 52$

**20** **Calcula la suma de todos los números impares de tres cifras.**

Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

**21** **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

**22** **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_n = 34$ y $S_n = 133$. Calcula $n$ y $a_1$.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot n}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3n - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3n$

$$133 = \frac{(37 - 3n + 34) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3n)n$$

$266 = 71n - 3n^2 \;\rightarrow\; 3n^2 - 71n + 266 = 0$

$$n = \frac{71 \pm \sqrt{5\,041 - 3\,192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1\,849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} n = 14/3 \text{ (no vale)} \\ n = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$

**23** **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que el perímetro vale 48 cm.**

Llamamos a los lados $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ y $a_6$.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} a_6 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; 13 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \;\rightarrow\; 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \;\rightarrow\; 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{array}\right.$$

$$48 = 78 - 15d \;\rightarrow\; 15d = 30 \;\rightarrow\; d = \frac{30}{15} = 2 \;\rightarrow\; d = 2$$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \;\rightarrow\; a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

**24** **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \;\rightarrow\; a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \;\rightarrow\; d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos $n$ para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 8{,}8 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 28 \;\rightarrow\; 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28$$

$$1{,}2n = 20{,}4 \;\rightarrow\; n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

**25** **Escribe los términos intermedios de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = -3$ y $a_{10} = 18$.**

$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 18 \;\rightarrow\; d = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

Los términos son: $a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{5}{3}$, $a_4 = 4$, $a_5 = \frac{19}{3}$, $a_6 = \frac{26}{3}$, $a_7 = 11$, $a_8 = \frac{40}{3}$, $a_9 = \frac{47}{3}$, $a_{10} = 18$.

**26** **Halla los dos términos centrales de una progresión aritmética de 8 términos sabiendo que $S_8 = 100$ y que $a_1 + 2a_8 = 48$.**

Tenemos que calcular $a_4$ y $a_5$. Sabemos que:

$$\begin{cases} S_8 = \dfrac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_8) \cdot 4 = 100 \;\rightarrow\; a_1 + a_8 = 25 \\ a_1 + 2a_8 = 48 \end{cases}$$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$$a_8 = 23 \;\rightarrow\; a_1 = 25 - a_8 = 25 - 23 = 2 \;\rightarrow\; a_1 = 2$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7d = 23 \;\rightarrow\; d = 3$$

Por tanto:

$$\left.\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11 \\ a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} a_4 = 11 \\ a_5 = 14 \end{matrix}$$

**27** **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $a_3 = 0{,}5$. Calcula $a_5$ y la expresión de $a_n$.**

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8r^2 = 0{,}5 \;\rightarrow\; r^2 = 0{,}0625 \;\rightarrow\; r = \pm\, 0{,}25 = \pm\, \frac{1}{4}$

**1.er caso:** $\boldsymbol{r = 0{,}25 = \frac{1}{4}}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-5}}$$

**2.° caso:** $\boldsymbol{r = -0{,}25 = -\frac{1}{4}}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

**28** **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula $a_1$ y $a_4$.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} =$$

$$= 364a_1 = 1\,456 \quad \to \quad a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

**29** **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20% de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\to$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \approx 429\,496{,}73$ €

**30** **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero un año después?**

☛ ***Un 6% anual corresponde a*** $\boldsymbol{\frac{6}{12}}$ ***= 0,5% mensual. Cada mes el dinero se multiplica por 1,005.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\to$ $5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

## Página 66

**31** **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula $a_1$ y la razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{1/r}{1-r} = \dfrac{1}{r-r^2} = 4 \quad \rightarrow \quad 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a_1 = 2$$

**32** **Comprueba, dando a $n$ valores grandes, que las siguientes sucesiones tienden a un número y di cuál es ese número:**

**a)** $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+1}$

**c)** $c_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

a) $a_{10} = 2{,}238$; $a_{100} = 2{,}473$; $a_{1\,000} = 2{,}497$

$\text{lím } a_n = 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$

b) $b_{10} = -1{,}970$; $b_{100} = -1{,}9997$; $b_{1\,000} = -1{,}999997$

$\text{lím } b_n = -2$

c) $c_{10} = 1{,}000977$; $c_{20} = 1{,}000000954$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}195$; $d_{100} = 0{,}019995$; $d_{1\,000} = 0{,}001999995$

$\text{lím } d_n = 0$

**33** **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

**a)** $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **b)** $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

**c)** $c_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **d)** $d_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+2}}$

**e)** $e_n = \dfrac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **f)** $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{10} = 0{,}7864$; $a_{100} = 0{,}9798$; $a_{1\,000} = 0{,}9980$

$\text{lím } a_n = 1$

b) $b_{10} = 0{,}5025$; $b_{100} = 0{,}500025$; $b_{1\,000} = 0{,}50000025$

$\text{lím } b_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

c) $c_{10} = 9{,}80$; $c_{100} = 30{,}1$; $c_{1\,000} = 94{,}90$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 1{,}756$; $d_{100} = 1{,}973$; $d_{1\,000} = 1{,}997$

$\text{lím } d_n = 2$

e) $e_{10} = 20{,}797$; $e_{100} = 107{,}278$; $e_{1\,000} = 1\,007{,}027$

$\text{lím } e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 0{,}760$; $f_{100} = 0{,}909$; $f_{1\,000} = 0{,}969$

$\text{lím } f_n = 1$

**34** **Comprueba si tienen límite las siguientes sucesiones:**

**a)** $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{n}$

**b)** $b_n = 1 + (-1)^n$

**c)** $c_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

**d)** $d_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

a) $a_{100} = 2{,}01$; $a_{101} = -2{,}0099$; $a_{1\,000} = 2{,}001$; $a_{1\,001} = -2{,}000999$

Los términos pares tienden a 2 y los impares a –2.

$a_n$ no tiene límite.

b) $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 0$; $b_4 = 2, \ldots$

Los términos impares son 0 y los pares son 2.

$b_n$ no tiene límite.

c) $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $c_4 = 0{,}5$; …; $c_{100} = 0{,}02$

Los términos impares son cero y los pares tienden a cero.

$\text{lím } c_n = 0.$

d) $d_1 = 0$; $d_2 = 1{,}5$; $d_3 = 0{,}67$; $d_4 = 1{,}25$; …; $d_{100} = 1{,}01$; $d_{101} = 0{,}99$

$\text{lím } d_n = 1.$

**35** **Dadas las sucesiones $a_n = n^2$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, estudia el límite de:**

**a)** $a_n + b_n$ **b)** $a_n \cdot b_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n^2 + \dfrac{1}{n^2+1}$

$A_{10} = 100{,}0099$; $A_{100} = 10\,000{,}0001$

$\textit{lím}\ (a_n + b_n) = +\infty$

b) $B_n = a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$B_{10} = 0{,}9901$; $B_{100} = 0{,}9999$

$\textit{lím}\ (a_n \cdot b_n) = 1$

c) $C_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{1(n^2+1)} = n^2(n^2+1) = n^4 + n^2$

$C_{10} = 10\,100$; $C_{100} = 100\,010\,000$

$\textit{lím}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

**36** **Durante 5 años depositamos en un banco 2 000 € al 4% con pago anual de intereses.**

**a) ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del quinto año?**

**b) ¿Qué cantidad de dinero hemos acumulado durante esos 5 años?**

a) Al final del 5º año:

– Los primeros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^5$ € ≈ 2 433,31 €

– Los segundos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^4$ € ≈ 2 339,72 €

– Los terceros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^3$ € ≈ 2 249,73 €

– Los cuartos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^2$ € = 2 163,2 €

– Los quintos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04$ € = 2 080 €

b) Sumamos las cantidades anteriores:

$$2\,000 \cdot 1{,}04^5 + 2\,000 \cdot 1{,}04^4 + 2\,000 \cdot 1{,}04^3 + 2\,000 \cdot 1{,}04^2 + 2\,000 \cdot 1{,}04 =$$

$$= 2\,000(1{,}04^5 + 1{,}04^4 + 1{,}04^3 + 1{,}04^2 + 1{,}04) \overset{(*)}{=}$$

$$= 2\,000 \cdot \frac{1{,}04^6 - 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 11\,265{,}95 \text{ €}$$

(*) Suma de una progresión geométrica con $a_1 = 1{,}04$ y $r = 1{,}04$.

**37** **Recibimos un préstamo de 2 000 € al 10% de interés anual y hemos de devolverlo en 4 años, pagando cada año los intereses de la parte adeudada más la cuarta parte del capital prestado. Calcula lo que tenemos que pagar cada año.**

$a_1 = 500 + 2000 \cdot 0,1 = 700$ €

$a_2 = 500 + 1500 \cdot 0,1 = 650$ €

$a_3 = 500 + 1000 \cdot 0,1 = 600$ €

$a_4 = 500 + 500 \cdot 0,1 = 550$ €

**38** **Halla el término general de la sucesión: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, … y estudia su límite.**

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1,1892$; …; $a_{10} \approx 1,0718$

$a_{100} \approx 1,00696$; $lím\ a_n = 1$

**39** **Dadas las sucesiones $a_n = n + 3$ y $b_n = 2 - n$, calcula los siguientes límites:**

**a)** $\textit{lím}\ (a_n + b_n)$

**b)** $\textit{lím}\ (a_n - b_n)$

**c)** $\textit{lím}\ (a_n \cdot b_n)$

**d)** $\textit{lím}\ \dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n + 3 + 2 - n = 5$

$lím\ (a_n + b_n) = 5$

b) $B_n = a_n - b_n = n + 3 - (2 - n) = n + 3 - 2 + n = 2n + 1$

$B_{10} = 21$; $B_{100} = 201$; $B_{1\,000} = 2001$

$lím\ (a_n - b_n) = +\infty$

c) $C_n = a_n \cdot b_n = (n + 3)(2 - n) = 2n - n^2 + 6 - 3n = -n^2 - n + 6$

$C_{10} = -104$; $C_{100} = -10\,094$; $C_{1\,000} = -1\,000\,994$

$lím\ (a_n \cdot b_n) = -\infty$

d) $D_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n + 3}{2 - n}$

$D_{10} = -1,625$; $D_{100} = -1,051$; $D_{1\,000} = -1,005$

$lím\ \dfrac{a_n}{b_n} = -1$

**40** **La sucesión $x^2 - x + 1$; $x^2 + 1$; $x^2 + x + 1$, ¿es una progresión aritmética?**

**Si lo fuese, calcula el quinto término y la suma de los cinco primeros términos.**

Llamamos $a_1 = x^2 - x + 1$; $a_2 = x^2 + 1$; $a_3 = x^2 + x + 1$.

Veamos si la diferencia entre cada dos términos consecutivos es la misma:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - x + 1) = x^2 + 1 - x^2 + x - 1 = x$$

$$a_3 - a_2 = x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + x + 1 - x^2 - 1 = x$$

Por tanto, sí es una progresión aritmética con $a_1 = x^2 - x + 1$ y diferencia $d = x$.

Así, tenemos que:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = x^2 - x + 1 + 4x = x^2 + 3x + 1$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(x^2 - x + 1 + x^2 + 3x + 1) \cdot 5}{2} = \frac{(2x^2 + 2x + 2) \cdot 5}{2}$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot 5 = 5x^2 + 5x + 5$$

**41** **Halla la siguiente suma:**

$$\mathbf{11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3}$$

Llmamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

## CUESTIONES TEÓRICAS

**42** **Sea $a_n$ una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?**

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $\text{lím } a_n = +\infty$.

**43** **Si $a_n$ es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?**

Al ir multiplicando por $\frac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $\text{lím } a_n = 0$.

**44** **La sucesión 3, 3, 3, 3, … puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?**

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

**45** **En una progresión geométrica cualquiera, $a, ar, ar^2, ar^3, \dots,$ comprueba que:**

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

**¿Se verifica también $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.**

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot a_6 &= a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 &= (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 &= (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{aligned}\right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 \cdot a_7 &= (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 &= (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{aligned}\right\} \text{ Son iguales}$$

**Propiedad:** Si $a_n$ es una progresión geométrica, se verifica que $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$ siempre que $p + q = m + n$.

**46** **El número $3,\widehat{9}$ podemos considerarlo como la suma de los infinitos términos de la sucesión:**

$$3, \frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \dots$$

**Calcula la suma y halla su límite. ¿Te parece razonable el resultado obtenido?**

$$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \dots = 3 + 0,9 + 0,99 + 0,999 + \dots = 3,\widehat{9}$$

Si consideramos la progresión geométrica $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \dots$ y sumamos todos sus términos, queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por tanto: $3 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \dots\right) = 3 + 1 = 4$

**47** **Inventa dos sucesiones cuyo límite sea infinito y que, al dividirlas, la sucesión que resulte tienda a 2.**

Por ejemplo: $a_n = 2n$; $b_n = n + 1$

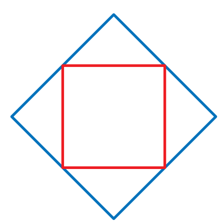
$$lím\ a_n = +\infty;\ lím\ b_n = +\infty$$

$$lím\ \frac{a_n}{b_n} = lím\ \frac{2n}{n+1} = 2$$

## Página 67

### PARA PROFUNDIZAR

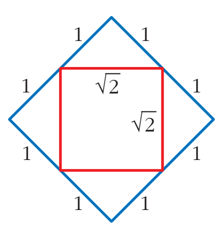
**48** **Dibuja un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y sobre cada lado un triángulo rectángulo isósceles; después dos, luego cuatro, como indican las figuras:**



**a) Forma la sucesión de los perímetros de las figuras obtenidas. ¿Cuál es su límite?**

**b) Forma también la sucesión de las áreas. ¿Cuál es su límite?**

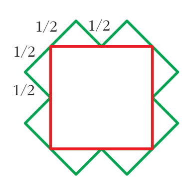
**1.$^{er}$ paso:**




Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 2 = 4 cm$^2$

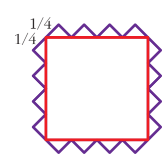
**2.º paso:**




Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 1 = 3 cm$^2$

**3.$^{er}$ paso:**




Perímetro = 8 cm

Área $= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ cm$^2$

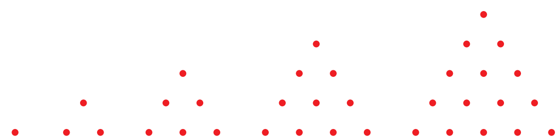
… **Paso *n*-ésimo:** $\begin{cases} \text{Perímetro} = 8 \text{ cm} \\ \text{Área} = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ cm}^2 \end{cases}$

a) 8, 8, 8, 8, …; $P_n = 8$; $\lim P_n = 8$

b) 4, 3, $\frac{5}{2}$, …; $A_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\lim A_n = 2$

(que es el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$).

**49** **Los términos de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15 se llaman números triangulares porque se pueden representar así:**



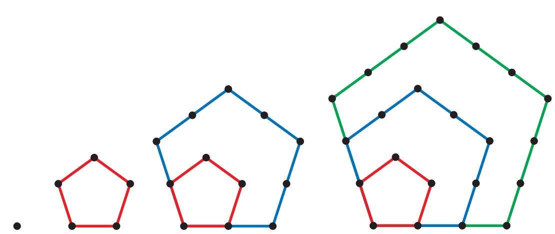
**Calcula $a_{10}$ y $a_n$.**

$a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$; $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

**50** **Los términos de la sucesión 1, 5, 12, 22, 35 se llaman números pentagonales porque se pueden representar así:**




**Calcula $a_6$, $a_{10}$ y $a_n$.**

☛ ***Esos números se pueden escribir así:***

***1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13***

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1 + 4 = 5;\ a_3 = 1 + 4 + 7 = 12;\ a_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

Observamos que vamos obteniendo las sumas de los términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$. En el paso $n$-ésimo tendremos:

$$a_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + (n - 1) \cdot 3) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) =$$

$$= \frac{(1 + (3n - 2)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}$$

Por tanto:

$$a_6 = \frac{17 \cdot 6}{2} = 17 \cdot 3 = 51;\ a_{10} = \frac{29 \cdot 10}{2} = 145$$

**51** **Utiliza las propiedades de las progresiones para simplificar la expresión del término general y calcular el límite de las siguientes sucesiones:**

**a)** $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

**b)** $b_n = 2n\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3}\right)$

a) $a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{(1+n)\cdot n}{2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n+n^2}{2}\right) = \frac{n^2+n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $lím\ a_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

b) $b_n = \frac{2n}{n^3}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n}{n^3}\left(\frac{(1+n)\cdot n}{2}\right) = \frac{2n}{n^3} \cdot \left(\frac{n+n^2}{2}\right) = \frac{2n^2+2n^3}{2n^3} =$

$$= \frac{2n^3+2n^2}{2n^2} = \frac{2n^2(n+1)}{2n^2} = n + 1$$

$b_{10} = 11$; $b_{100} = 101$; $b_{1\,000} = 1\,001$; $lím\ b_n = +\infty$

## AUTOEVALUACIÓN

**1.** **Halla el término $a_{47}$ de la sucesión cuyo término general es:**

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n+3}$$

$a_{47} = \frac{47^2 - 709}{47 + 3} = \frac{2\,209 - 709}{50} = 30$

**2.** **Halla el término octavo de la sucesión definida así:**

$$a_1 = 4,\ \ a_2 = 7,\ \ a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

$a_8 = 2a_6 - a_7$

$a_1 = 4$ | $a_2 = 7$

$a_3 = 2a_1 - a_2 = 1$ | $a_4 = 2a_2 - a_3 = 13$

$a_5 = 2a_3 - a_4 = -11$ | $a_6 = 2a_4 - a_5 = 37$

$a_7 = 2a_5 - a_6 = -59$ | $a_8 = 2a_6 - a_7 = 133$

**3. Halla el término general de las sucesiones:**

**a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …**

**b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …**

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$ y primer término $a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) El término general de la sucesión 0, 1, 4, 9, 16, 25, … es $a_n = (n - 1)^2$.

Por tanto, 1, 2, 5, 10, 17, 26, … tiene por término general $a_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

**4. Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:**

**a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, …**

**b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …**

**c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …**

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

**5. Halla las siguientes sumas:**

**a) $3 + 7 + 11 + \dots + 43$**

**b) $1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \dots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}$**

**c) $80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \dots$**

**d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2$**

**e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3$**

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \to S_{15} = \frac{1\,000 \cdot 1{,}1^{15} - 1\,000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{80}{1-1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5\,546\,940 - 2\,030\,100}{6} = 586\,140$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \text{n}^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$$

**6. En una progresión aritmética conocemos $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.**

**a) Calcula $a_1 + a_{100}$.**

**b) Obtén el valor de $a_{220}$.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \to 85d - 14d = 42{,}6 \to d = 0{,}6$$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_1 + a_{100} = a_{15} + a_{86} = 43 + 85{,}6 = 128{,}6$ pues $1 + 100 = 15 + 86$

($a_{15}$ y $a_{86}$ “equidistan” de $a_1$ y $a_{100}$).

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

**7. Halla los límites de las siguientes sucesiones:**

$$a_n = \frac{5}{n} \qquad b_n = \frac{5+3n}{n+1} \qquad c_n = \frac{n^2+1}{5n}$$

a) $a_{10} = 0{,}5$ $\quad a_{100} = 0{,}05$ $\quad a_{1\,000} = 0{,}005 \to \text{lím}\, \dfrac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3{,}18$ $\quad b_{100} = 3{,}02$ $\quad b_{1\,000} = 3{,}002 \to \text{lím}\, \dfrac{5+3n}{n+1} = 3$

c) $c_{10} = 2{,}02$ $\quad c_{100} = 20{,}002$ $\quad c_{1\,000} = 200{,}0002 \to \text{lím}\, \dfrac{n^2+1}{5n} = +\infty$