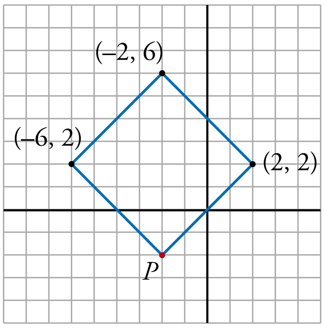
PÁGINA 194

PRACTICA

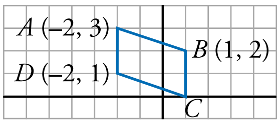
Puntos

1 □□□ **Si los puntos (–6, 2), (–2, 6) y (2, 2) son vértices de un cuadrado, ¿cuál es el cuarto vértice?**



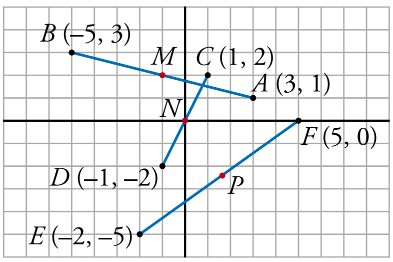
$P(-2, 2)$

2 □□□ **Los puntos (–2, 3), (1, 2) y (–2, 1) son vértices de un paralelogramo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?**



$C = (1, 0)$

3 □□□ **Representa los puntos $A(3, 1)$, $B(-5, 3)$, $C(1, 2)$, $D(-1, -2)$, $E(-2, -5)$, $F(5, 0)$ y halla las coordenadas del punto medio de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.**

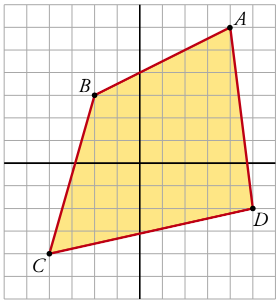


$M = (-1, 2)$

$N = (0, 0)$

$P = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-5}{2}\right)$

4 □□□ **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero *ABCD*.**



$$A(4, 6),\ B(-2, 3),\ C(-4, -4),\ D(5, -2)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right) \qquad M_{BC} = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M_{CD} = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right) \qquad M_{AD} = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

$$M_{AC} = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1) \qquad M_{BD} = \left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5 □□□ **Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:**

a) $P(-2, 0)$ **b)** $Q(2, -3)$ **c)** $O(0, 0)$

a) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (-2, 0);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = -2 \rightarrow x = -1 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \rightarrow y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(-1, 5)$

b) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (2, -3);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 2 \rightarrow x = 7 \\ \frac{-5+y}{2} = -3 \rightarrow y = -1 \end{cases}\right\}\ A'(7, -1)$

c) $\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right) = (0, 0);\ \left.\begin{cases} \frac{-3+x}{2} = 0 \rightarrow x = 3 \\ \frac{-5+y}{2} = 0 \rightarrow y = 5 \end{cases}\right\}\ A'(3, 5)$

6 □□□ **Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento *AB*, halla el punto *B* en cada uno de los siguientes casos:**

a) $A(-1, 5)$ **b)** $A(6, -4)$ **c)** $A(-4, -7)$

a) $\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -5;\ y = 5 \rightarrow B(-5, 5)$

b) $\left(\frac{6+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -12;\ y = 14 \rightarrow B(-12, 14)$

c) $\left(\frac{-4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \rightarrow x = -2;\ y = 17 \rightarrow B(-2, 17)$

7 □□□ **Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D, sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$, $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-3+x}{2} = 1 \;\rightarrow\; x = 5 \\ \dfrac{-1+y}{2} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; y = 2 \end{array}\right\} D(5, 2)$$

8 □□□ **Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:**

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

a) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \rightarrow \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{8-3}{19-4} \rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15}$ Cierto.

b) $\dfrac{0+3}{2+2} = \dfrac{-21-0}{-26-2} \rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$ Cierto.

9 □□□ **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

a) $A(-1, 3)$, $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $C(-4, -2)$

b) $A(1, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(5, 2)$

a) $\dfrac{1/2 - 3}{-5/2 + 1} = \dfrac{-2 - 1/2}{-4 + 5/2} \rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ Sí están alineados.

b) $\dfrac{-2-0}{-3-1} = \dfrac{2+2}{5+3} \rightarrow \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{4}{8}$ Sí están alineados.

10 □□□ **Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$$\frac{-2-1}{5+1} = \frac{m-1}{2+1} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{m-1}{3} \rightarrow m = -\frac{3}{2} + 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Rectas

11 □□□ **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:**

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$ **b)** $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$ **d)** $A(-2, -4)$, $B(10, 24)$

a) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \dfrac{y-0}{3-0} = \dfrac{x+1}{0+1} \rightarrow y = 3x + 3$

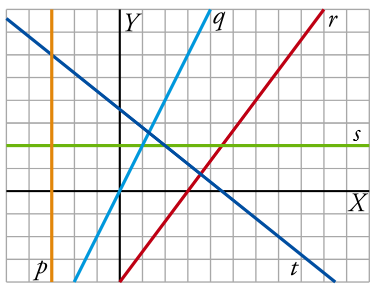
b) $\dfrac{y+2}{-2+2} = \dfrac{x-0}{5-0} \rightarrow \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{x}{5} \rightarrow y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$

c) $\dfrac{y-3}{-1-3} = \dfrac{x+2}{4+2} \rightarrow 6(y-3) = -4(x+2) \rightarrow 6y - 18 = -4x - 8 \rightarrow$

$\rightarrow 4x + 6y - 10 = 0 \rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$

d) $\dfrac{y+4}{24+4} = \dfrac{x+2}{10+2} \rightarrow 7x - 3y + 2 = 0$

12 □□□ **Escribe la ecuación de las rectas *p*, *q*, *r*, *s* y *t*.**



r: (0, –4) y (3, 0)

$\dfrac{y+4}{0+4} = \dfrac{x-0}{3-0} \rightarrow 3y + 12 = 4x \rightarrow 4x - 3y - 12 = 0$

s: $y = 2$

t: (2, 2) y (–3, 6)

$\dfrac{y-2}{6-2} = \dfrac{x-2}{-3-2} \rightarrow -5y + 10 = 4x - 4 \rightarrow 4x + 5y - 14 = 0$

p: $x = -3$

q: (0, 0) y (2, 4)

$\dfrac{y-0}{4-0} = \dfrac{x-0}{2-0} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = 2x$

13 □□□ **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \dfrac{1}{2}(x + 4)$

b) $y = 3 - 2(x - 1)$

c) $y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

14 □□□ **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) $m = -2;\ \ y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2};\ \ y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \ \rightarrow\ y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2};\ \ y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \ \rightarrow\ y = -3 - \frac{3}{2}x$

15 □□□ **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:**

a) $r: y = -2x + 3;\ \ P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0;\ \ P(4, -1)$

c) $r: x = 3;\ \ P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2};\ \ y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3};\ \ y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

16 □□□ **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$, halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a AB.

s: pasa por B y es perpendicular a AB.

$m_{AB} = \frac{0 - 2}{5 + 3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

r: pendiente $= 4;\ \ y = 2 + 4(x + 3) \ \rightarrow\ y = 4x + 14$

s: pendiente $= 4;\ \ y = 0 + 4(x - 5) \ \rightarrow\ y = 4x - 20$

17 □□□ **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

A: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \ \rightarrow\ A \in r$

B: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \ \rightarrow\ B \notin r$

18 □□□ **Calcula n y m para que las rectas**

$$r: 3x + my - 8 = 0 \qquad s: nx - 2y + 3 = 0$$

se corten en el punto $P(1, 5)$.

r: $3x + my - 8 = 0 \ \rightarrow\ 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \ \rightarrow\ m = 1$

s: $nx - 2y + 3 = 0 \ \rightarrow\ n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \ \rightarrow\ n = 7$

PÁGINA 195

19 **Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 19 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x + 6 = 0 \\ s: 2y - 5 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \xrightarrow{\cdot 7} & 21x - 35y + 119 = 0 \\ s: 7x + 3y - 19 = 0 \xrightarrow[\cdot(-3)]{} & -21x - 9y + 57 = 0 \end{cases}$

$$-44y + 176 = 0 \rightarrow y = 4$$

$3x - 5 \cdot 4 + 17 = 0 \rightarrow 3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1$

r y s se cortan en el punto $P(1, 4)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5/2 \end{array}\right\} P\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$

20 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

r: $3x - 5y + 15 = 0$ y s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$

r: $3x - 5y + 15 = 0$

s: $m = \dfrac{3+3}{8+2} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $y = -3 + \dfrac{3}{5}(x + 2) \rightarrow$

$\rightarrow 5y = -15 + 3x + 6 \rightarrow 3x - 5y - 9 = 0$

Las rectas r y s son paralelas.

21 **Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3)$, $B(2, 7) \rightarrow m = \dfrac{7-3}{2+5} = \dfrac{4}{7}$; $m' = -\dfrac{7}{4}$

$M_{AB} = \left(\dfrac{-5+2}{2}, \dfrac{3+7}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, 5\right)$

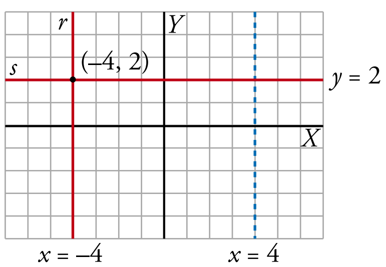
$y = 5 - \dfrac{7}{4}\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow y = 5 - \dfrac{7}{4}x - \dfrac{21}{8} \rightarrow 8y = 40 - 14x - 21 \rightarrow 14x + 8y - 19 = 0$

22 **Las rectas r y s pasan por el punto $(-4, 2)$; r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s, y halla su ecuación.**

$3x - 12 = 0 \rightarrow x = 4$

Paralela a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow r$: $x = -4$

Perpendicular a $x = 4$ que pasa por $(-4, 2) \rightarrow s$: $y = 2$



23 □□□ **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

a) • s: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$

$m = \dfrac{3-1}{-2-3} = \dfrac{2}{-5} = -\dfrac{2}{5}$

$y = 1 - \dfrac{2}{5}(x-3) \to 5y = 5 - 2x + 6 \to 2x + 5y - 11 = 0$

• r: $2x - 5y + 3 = 0$

s: $2x + 5y - 11 = 0$

$4x - 8 = 0 \to x = 2$

$2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \to 5y = 7 \to y = \dfrac{7}{5}$

r y s se cortan en el punto $\left(2, \dfrac{7}{5}\right)$.

b) • s: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$

$m = \dfrac{2-7}{-4} = \dfrac{5}{4}$; $y = 2 + \dfrac{5}{4}(x - 0) \to y = 2 + \dfrac{5}{4}x \to$

$\to 4y = 8 + 5x \to 5x - 4y + 8 = 0$

r: $5x - 4y + 8 = 0$

r y s son la misma recta.

24 □□□ **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

$5x - 4y + 3 = 0 \to m = \dfrac{5}{4}$

r es la recta de pendiente $\dfrac{5}{4}$ que pasa por (1, 3):

r: $y = 3 + \dfrac{5}{4}(x-1) \to 4y = 12 + 5x - 5 \to 5x - 4y + 7 = 0$

s es la recta de pendiente $-\dfrac{4}{5}$ que pasa por (1, 3):

s: $y = 3 - \dfrac{4}{5}(x-1) \to 5y = 15 - 4x + 4 \to 4x + 5y - 19 = 0$

Distancias entre dos puntos

25 □□□ **Calcula la distancia entre P y Q.**

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$

b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$

d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

a) $d = \sqrt{(3-3)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $d = \sqrt{(-8+6)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $d = \sqrt{5^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $d = \sqrt{(-3-15)^2 + 0^2} = 18$

26 □□□ **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.**

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) $M\left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $A(-2, 0) \to \overline{AM} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$B(6, 4) \to \overline{MB} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

27 □□□ **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ \overline{AC} = \sqrt{(-1-7)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ \overline{BC} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

28 □□□ **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo. Halla su perímetro y su área.**

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

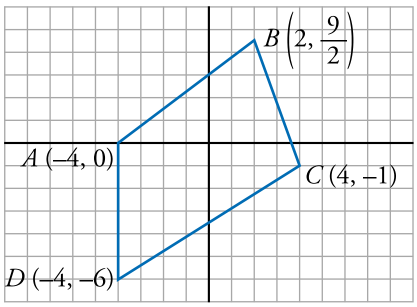
$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\sqrt{58}^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{29}^2$

Perímetro $= (\sqrt{29} + \sqrt{20} + \sqrt{80})$ u

Área $= \dfrac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} = \dfrac{29}{2}$ u^2

29 □□□ **Representa el cuadrilátero de vértices $A(-4, 0)$, $B(2, 9/2)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -6)$ y halla su perímetro.**



$\overline{AB} = \sqrt{6^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \dfrac{15}{2}$ u

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + \left(-\dfrac{11}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{137}}{2}$ u

$\overline{CD} = \sqrt{(-8)^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$ u

$\overline{AD} = 6$ u

Perímetro = 7,5 + 5,85 + 9,43 + 6 = 28,78 u

PIENSA Y RESUELVE

30 □□□ **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X.**

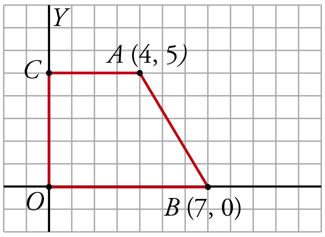
Dibuja el trapecio y halla:

a) Las ecuaciones de los lados.

b) Su perímetro.

c) Su área.

a)



OC: $x = 0$

OB: $y = 0$

AC: $y = 5$

AB: $\dfrac{y-0}{5-0} = \dfrac{x-7}{4-7} \to -3y = 5x - 35 \to 5x + 3y - 35 = 0$

b) $\overline{AC} = 4$; $\overline{OC} = 5$; $\overline{OB} = 7$; $\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$P = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16 + \sqrt{34}$ u

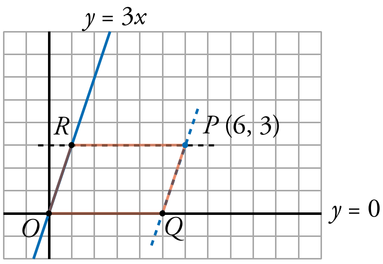
c) $A = \dfrac{7+4}{2} \cdot 5 = \dfrac{11}{2} \cdot 5 = \dfrac{55}{2}$ u^2

31 □□□ **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$, y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

a) Halla las ecuaciones de los otros lados.

b) Halla las coordenadas de los otros vértices.

a)



OR: $y = 3x$

OQ: $y = 0$

PR: $y = 3$

PQ: $y = 3 + 3(x - 6) \to$

$\to y = 3 + 3x - 18 \to 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

32 □□□ **Determina los puntos que dividen al segmento de extremos $A(-5, -2)$ y $B(7, 2)$ en cuatro partes iguales.**

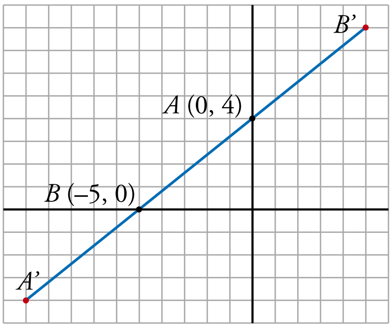
Punto medio de AB, $M\left(\dfrac{-5+7}{2}, \dfrac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$

Punto medio de AM, $P\left(\dfrac{-5+1}{2}, \dfrac{-2+0}{2}\right) = (-2, -1)$

Punto medio de BM, $Q\left(\frac{7+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, 1)$

Los puntos buscados son $M(1, 0)$, $P(-2, -1)$ y $Q(4, 1)$.

33 **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.**



Simétrico de A respecto de B:

$$A'\left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) = (-5, 0) \left\langle \begin{array}{l} \frac{x}{2} = -5 \to x = -10 \\ 4+y = 0 \to y = -4 \end{array} \right\} A'(-10, -4)$$

Simétrico de B respecto de A:

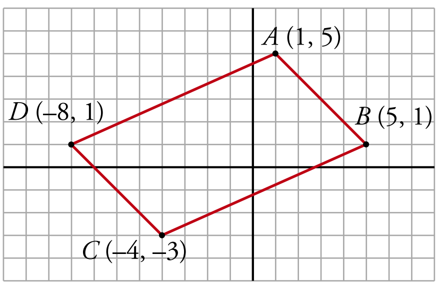
$$B'\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = (0, 4) \left\langle \begin{array}{l} -5+x = 0 \to x = 5 \\ y = 8 \end{array} \right\} B'(5, 8)$$

34 **Los segmentos AC y BD tienen el mismo punto medio. Halla las coordenadas del punto D sabiendo que $A(-2, 3)$, $B(-3, -1)$ y $C(4, -2)$.**

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3+x}{2} = 1 \to x = 5 \\ \frac{-1+y}{2} = \frac{1}{2} \to y = 2 \end{array} \right\} D(5, 2)$$

35 **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**



- Punto medio de AC:

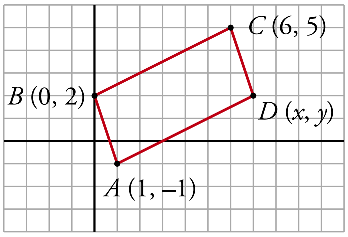
$$M_{AC} = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{5-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.

36 **Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.**



• Punto medio de AC:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

• Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

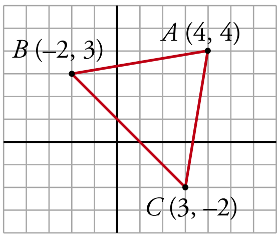
$$\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x = 7$$

$$\frac{y+2}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2$$

El punto D tiene coordenadas $D(7, 2)$.

37 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.**

☞ ***Ten en cuenta que una altura corta al lado desigual en su punto medio.***



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \\ \overline{AC} = \sqrt{(4-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \end{array}\right\} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Calculamos la altura sobre el lado BC:

$$M_{BC} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

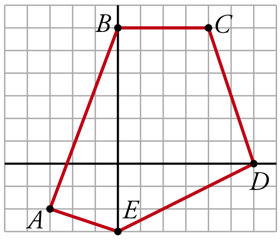
La altura es la distancia entre A y el punto medio de BC:

$$h = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (7/2)\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{2}\ u^2$$

38 **a) Calcula el perímetro del pentágono *ABCDE*.**

b) Descomponlo en figuras más simples y halla su área.



a) $\overline{BC} = 4$; $\overline{CD} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$; $\overline{DE} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$; $\overline{AE} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} =$

$= \sqrt{10}$; $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

Perímetro $= 4 + \sqrt{40} + \sqrt{45} + \sqrt{10} + \sqrt{73} \approx 28{,}74$ u

b) $$\left.\begin{array}{l} A_{BCDO} = \dfrac{(6+4)\cdot 6}{2} = 30\ u^2 \\[2ex] A_{ODE} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9\ u^2 \\[2ex] A_{ABE} = \dfrac{9 \cdot 3}{2} = 13{,}5\ u^2 \end{array}\right\} \quad A_{ABCDE} = 30 + 9 + 13{,}5 = 52{,}5\ u^2$$

PÁGINA 196

39 **Resuelto en el libro de texto.**

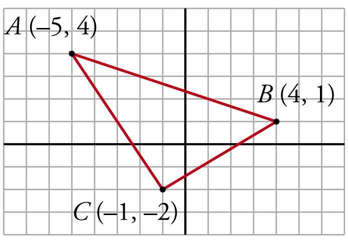
40 **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, -2)$, halla:**

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado *AC*.

c) La ecuación de la mediana del vértice *B*.

a)



• Lado AB:

$$m = \frac{4-1}{-5-4} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$y = 1 - \frac{1}{3}(x-4) \rightarrow 3y = 3 - x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

• Lado AC:

$$m = \frac{4+2}{-5+1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -2 - \frac{3}{2}(x+1) \rightarrow 2y = -4 - 3x - 3 \rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$$

- Lado BC:

  $m = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$

  $y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \rightarrow 5y = 5 + 3x - 12 \rightarrow 3x - 5y - 7 = 0$

b) $M_{AC} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a B pasa, también, por el punto medio de AC, M_{AC}.

$m = \frac{1-1}{4+3} = 0$

$y = 1 + 0(x+3) \rightarrow y = 1$

41 **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(3, 0)$, halla:**

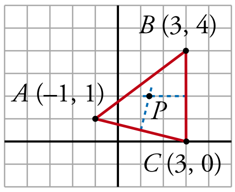
a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).

a) La mediatriz de BC es la perpendicular a BC por su punto medio, M_{BC}.

$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$



La recta que contiene a BC es $x = 3$. Su perpendicular por $(3, 2)$ es $y = 2$, mediatriz de BC.

b) $M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Pendiente de la recta que contiene a AC, $m = \frac{1-0}{-1-3} = -\frac{1}{4}$.

Pendiente de la perpendicular a AC, $m' = 4$.

Mediatriz de AC: $y = \frac{1}{2} + 4(x-1) \rightarrow 2y = 1 + 8x - 8 \rightarrow 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, P:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} \; 4 - 8x + 7 = 0 \rightarrow 8x = 11 \rightarrow x = 11/8$$

Las coordenadas de P son $\left(\frac{11}{8}, 2\right)$.

42 ■■□ **Dadas estas rectas:**

$$r: 3x + by - 12 = 0$$
$$s: ax - y + 6 = 0$$

calcula los valores de a y de b sabiendo que r y s son perpendiculares entre sí y que r pasa por el punto (9, –15/2).

- Como r: $3x + by - 12 = 0$ pasa por $\left(9, -\frac{15}{2}\right)$:

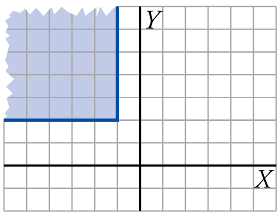
$$3 \cdot 9 + b \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) - 12 = 0 \rightarrow 27 - \frac{15b}{2} - 12 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 15 = \frac{15b}{2} \rightarrow \frac{2 \cdot 15}{15} = b \rightarrow b = 2$$

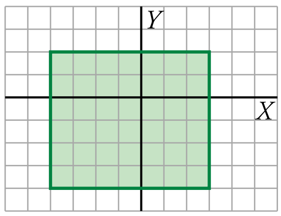
- r y s son perpendiculares:

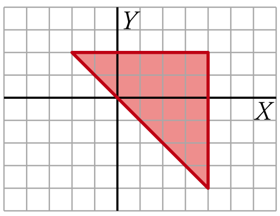
$$m_r = -\frac{3}{2} \rightarrow m_s = \frac{2}{3} = a \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

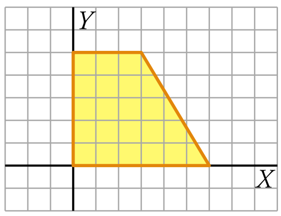
43 ■■□ **Resuelto en el libro de texto.**

44 ■■□ **Describe, mediante inecuaciones o sistemas de inecuaciones, los siguientes recintos:**

a)


b)


c)


d)


a) $\left.\begin{array}{l} x \le -1 \\ y \ge 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 1 \le 0 \\ y - 2 \ge 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} -4 \le x \le 3 \\ -4 \le y \le 2 \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l} y \le 2 \\ x \le 4 \\ x \ge -y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 2 \le 0 \\ x - 4 \le 0 \\ x + y \ge 0 \end{array}\right.$

d) El lado oblicuo del trapecio pasa por (6, 0) y (3, 5). Su ecuación es:

$$\frac{y - 5}{0 - 5} = \frac{x - 3}{6 - 3} \rightarrow 3y - 15 = -5x + 15 \rightarrow 5x + 3y = 30$$

Probamos con el punto (1, 1) que está dentro del recinto:

$5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8 < 30$

Las ecuaciones del recinto son:

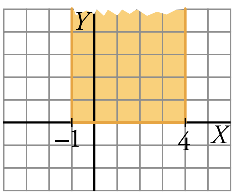
$$\begin{cases} 5x + 3y \le 30 \\ x \ge 0 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$$

45 **Representa gráficamente los siguientes recintos:**

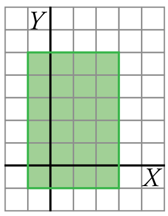
a) $\begin{cases} -1 \le x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ -1 \le y \le 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \le 0 \\ -5 \le y \le 0 \\ 5x - 2y \ge -10 \end{cases}$

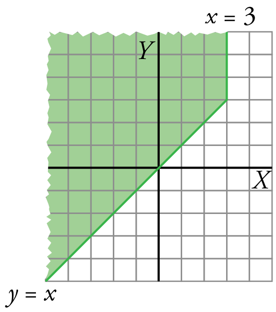
a)



b)



c)



d)