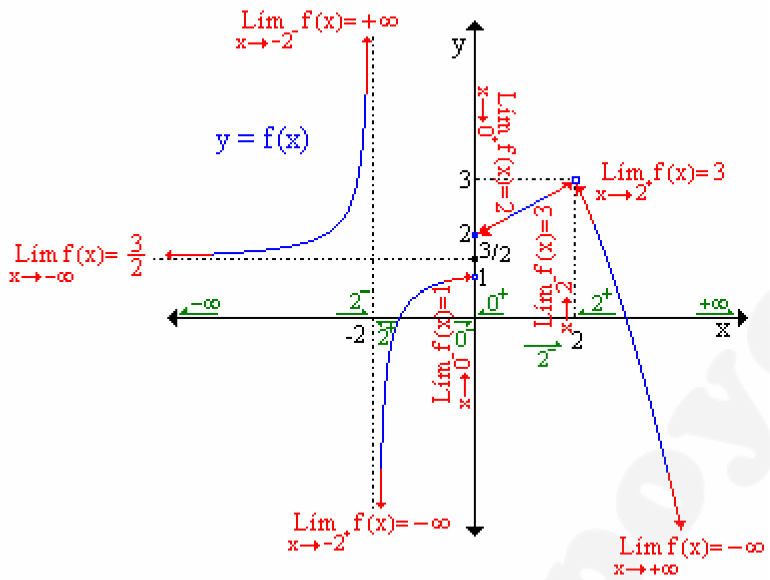
1. Para resolver un límite con ayuda de la gráfica de la función hay que fijarse hacia donde tienden las imágenes de la función (los valores de y) cuando los valores de x se aproximan hacia el punto donde quiere calcularse el límite.



a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

g) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

h) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

La condición para que una función tenga límite en un punto es que en ese punto existan sus límites laterales y además coincidan.

i) $\lim_{x\to-2} f(x) = \nexists$ Porque $\lim_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim_{x\to-2^+} f(x)$

j) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ Porque $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

k) $\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$ Porque $\lim_{x\to -0^-} f(x) \neq \lim_{x\to -0^+} f(x)$

2. Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^3(3x+2)^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ La indeterminación se resuelve ordenando los polinomios y simplificando todos los términos por x^5 (monomio de mayor grado del denominador)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^3(3x+2)^2}{x(x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(8x^3+12x^2+6x+1)\cdot(9x^2+12x+4)}{x(x^4+2x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{72x^5+204x^4+230x^3+129x^2+36x+4}{x^5+2x^3+x} \underset{\div x^5}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{72+\frac{204}{x}+\frac{230}{x^2}+\frac{129}{x^3}+\frac{36}{x^4}+\frac{4}{x^5}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}} =$$

$$= \frac{72+\frac{204}{\infty}+\frac{230}{\infty^2}+\frac{129}{\infty^3}+\frac{36}{\infty^4}+\frac{4}{\infty^5}}{1+\frac{2}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^4}} = \frac{72+0+0+0+0+0}{1+0+0} = 72$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \infty-\infty = ?$ Se restan las fracciones algebraicas y se transforma en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x^2+1\right)-x^3(x+1)}{(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-x^4-x^3}{x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Se dividen todos los términos por x^3 (monomio de mayor grado del denominador).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{x^3+x^2+x+1} \overset{\div x^3}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{1}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}} = \frac{0-1}{1+0+0+0} = -1$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = ?$ Se dividen todos los términos por x (monomio de mayor grado del denominador). $\left(\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} < x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+\sqrt[3]{x^2}} \overset{\div x}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}} = \frac{2-\frac{1}{\infty}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}}} = \frac{2-0}{1+\sqrt[3]{0}} = 2$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x+5\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right) = \infty-\infty = ?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}-(x-5)\right)\left(\sqrt{x^2-5}+(x-5)\right)}{\left(\sqrt{x^2-5}+(x-5)\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2-(x-5)^2}{\sqrt{x^2-5}+(x-5)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5-\left(x^2-10x+25\right)}{\sqrt{x^2-5}+(x-5)} = \lim_{x\to\infty}\frac{10x-30}{\sqrt{x^2-5}+x-5} \underset{\div x}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}+1-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-5}{x^2}}+1-\frac{5}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{10-\frac{30}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}+1-\frac{5}{x}} = \frac{10-\frac{30}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{5}{\infty^2}}+1-\frac{5}{\infty}} = \frac{10-0}{\sqrt{1-0}+1-0} = \frac{10}{2} = 5$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2\left(x^2+1\right)}-x^2\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right) = \infty-\infty = ?$

Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2-\left(x^2\right)^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-x^4}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+x^2}{x^4}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\infty-\infty=?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma $\times$ diferencia.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-2-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x}}\underset{\div x}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-3x-2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{-2-\frac{2}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}=\frac{-2-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{1-0}}=\frac{-2}{2}=-1$$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^2}=1^{\infty}=?$ La indeterminación se resuelve mediante el número e.

$$\underset{x\to x_o}{\text{Lím}}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left\{\begin{array}{l}\underset{x\to x_o}{\text{Lím}}\ f(x)=1\\ \underset{x\to x_o}{\text{Lím}}\ g(x)=\pm\infty\end{array}\right\}=e^{\underset{x\to x_o}{\text{Lím}}\left(g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1-1\cdot\left(x^3+1\right)}{x^3+1}\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{x^3-1-x^3-1}{x^3+1}\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\frac{-2}{x^3+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^3+1}}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}}=e^{\frac{\frac{-2}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^3}}}=e^{\frac{0}{1+0}}=e^0=1$$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = 1^{\infty} = ?$ Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x^2+x+1-1\cdot(x^2+1)}{x^2+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 1} = e^1 = e$$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+5}\right)^{2x-1} = 1^{-\infty} = ?$ Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+5}\right)^{2x-1} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\cdot\left(\frac{x^2-2x}{x^2+5}-1\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\cdot\frac{x^2-2x-1\cdot(x^2+5)}{x^2+5}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((2x-1)\cdot\frac{-2x-6}{x^2+5}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2-10x+6}{x^2+5}} \underset{\div x^2}{=} e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4-\frac{10}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}} = e^{\frac{-4-\frac{10}{-\infty}+\frac{6}{(-\infty)^2}}{1+\frac{5}{(-\infty)^2}}} = e^{\frac{-4-0+0}{1+0}}\ e^{-4}$$

3. Calcula el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a menos infinito:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x-1\right) = -3(-\infty)^3 = -3\cdot-\infty = +\infty$ Los límites de polinomios cuando la variable tiende a infinito solo dependen del monomio de mayor grado

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2} = 1^{-\infty} = ?$ Se resuelve con el número e.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-2)\cdot\left(\frac{2x+1}{2x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left((3x-2)\cdot\frac{1}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{2x}} \underset{\div x}{=} e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{2}} = e^{\frac{3-\frac{2}{-\infty}}{2}} =$$

$$= e^{\frac{3+0}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2} = \infty-\infty = ?$ Se multiplica y divide por el conjugado de la expresión irracional, buscando en el numerador la expresión notable suma × diferencia.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}} \underset{\div x}{\overset{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} =$$

$$=\frac{2-\frac{2}{-\infty}}{\sqrt{1+\frac{2}{-\infty}}+\sqrt{1-\frac{2}{(-\infty)^2}}}=\frac{2+0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

4. Calcula el límite cuando $x\to\pm\infty$ de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\infty-\infty=?$ Se restan las fracciones algebraicas y se transforma en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot(x-3)-3x^2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^4-3x^3-3x^2}{x^3-3x^2+x-3}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{-2\cdot\infty-3-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}-\frac{3}{\infty^3}}=\frac{-\infty-3-0}{1-0+0-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{3x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\cdot(x-3)-3x^2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4-3x^3-3x^2}{x^3-3x^2+x-3}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-3-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{-2\cdot(-\infty)-3-\frac{3}{-\infty}}{1-\frac{3}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}-\frac{3}{(-\infty)^3}}=\frac{\infty-3+0}{1+0+0+0}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5^x}{4^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^{\infty}=\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{4^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^{-\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2x}}{x^2-\sqrt{2x}}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\sqrt{2x}}{x^2-\sqrt{2x}}}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{\sqrt{2x}}{x^2}}{1-\frac{\sqrt{2x}}{x^2}}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{2x}{x^4}}}{1-\sqrt{\frac{2x}{x^4}}}}=$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{2}{x^3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{x^3}}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2}{(\pm\infty)^3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{(\pm\infty)^3}}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{0}}{1-\sqrt{0}}}=1$$

5. Calcula m con la condición:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=6$$

Solución.

Se calcula el límite en función del parámetro (m), y se iguala con el valor del límite.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2-4}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=$$

$$=\frac{-2m+\frac{(2-3m)}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{1-\frac{4}{\infty^2}}=\frac{-2m+0+0}{1-0}=-2m$$

$$-2m=6:m=\frac{6}{-2}=-3$$

6. Dada $f(x)=\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}$, calcula su límite:

a) Cuando x tiende a 1
b) Cuando x tiende a 0
c) Cuando x tiende a 4

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 1^2-6\cdot 1-8}{1^2-4\cdot 1}=\frac{-12}{-3}=4$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{0^2-4\cdot 0}=\frac{-8}{0}=-\infty$. Si al sustituir x por el valor al que tiende queda la expresión $\frac{k}{0}$, se estudian los límites laterales.

Mi consejo para calcular los límites laterales es factorizar el denominador, y solo sustituir x por los valores laterales en la x del factor del denominador que se este anulando.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^2-6x-8}{(x-4)x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{(0-4)\cdot 0^-}=\frac{-8}{-4\cdot 0^-}=\frac{-8}{0^+}-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^2-6x-8}{(x-4)x}=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0-8}{(0-4)\cdot 0^+}=\frac{-8}{-4\cdot 0^+}=\frac{-8}{0^-}+\infty$

Conclusión: Como lo límites laterales son distintos, no existe límite cuando x tiende a cero

c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\frac{2\cdot 4^2-6\cdot 4-8}{4^2-4\cdot 4}=\frac{0}{0}=?$. La indeterminación se resuelve descomponiendo numerador y denominador factorialmente, y eliminando el factor común. La descomposición se puede hacer por el método de Ruffini, mediante el empleo de expresiones notables o en el caso de polinomios de segundo grado o bicuadradas por su método. Mi consejo es hacerlo por Ruffini, dividiendo siempre por el valor al que tiende la variable.

$2x^2-6x-8=0$

	2	−6	−8
4		8	8
	2	2	0

$2x^2-6x-8=(2x+2)(x-4)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+2)\cdot(x-4)}{x\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+2)}{x}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

7. Calcula el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+(2+x)^2}{1+x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+4x+2}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cdot(x^2+2x+1)}{(x+2)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}=\dfrac{9}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+(2+x)^2}{1+x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{1+x}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+4)}{1+x}=\lim\limits_{x\to -1}(x+4)=-1+4=3$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{0}{0}=?$. Se descomponen los polinomios por Rufini

$x^3+6x^2+12x+8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8\\ -2 & & -2 & -8 & -8\\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0}\end{array}$$

x^3-2x^2-4x+8

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8\\ -2 & & -2 & 8 & -8\\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}\end{array}$$

$x^3+6x^2+12x+8=(x+2)(x^2+4x+4)$ $\quad x^3-2x^2-4x+8=(x+2)(x^2-4x+4)$

$$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot(x^2+4x+4)}{(x+2)\cdot(x^2-4x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}=\frac{(-2)^2+4(-2)+4}{(-2)^2-4(-2)+4}=\frac{0}{16}=0$$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+4x+2}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{0}=\infty$ Al quedar la expresión $\dfrac{k}{0}$, se estudian los límites laterales, para saber si existe límite.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}=\dfrac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2^-+2}=\dfrac{12}{0^-}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}=\dfrac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2^++2}=\dfrac{12}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\ \lim\limits_{x\to -2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)\Rightarrow \text{No}\ \exists\ \lim\limits_{x\to -2}f(x)$$

8. Dada $f(x)=\dfrac{x^2+mx-6}{3x-9}$ calcula m para que tenga límite finito cuando x tiende a 3. ¿Cuanto vale entonces el límite?

Solución.

Calculamos el límite:

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+mx-6}{3x-9}=\frac{3+3m}{0}$$

Para que el límite sea finito, el numerador debería dar cero, generándose una indeterminación que al resolverse deberá dar finito. En caso contrario, si el denominador quedará distinto de cero, el limite sería infinito.

$$3+3m=0:m=-1$$

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{3x-9}\underset{\text{Ruffini}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{3\cdot(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{3}=\frac{5}{3}$$

9. Calcula los siguientes límites:

Solución.

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{4}{0}=\infty-\infty=?$ La indeterminación se resuelve restando las fracciones algebraicas, se obtiene $\frac{k}{0}$ y se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\left(x^2+3\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x-2}{x-1}=\frac{-2}{0}=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{-1^2+1-2}{1^- -1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{-1^2+1-2}{1^+ -1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No}\ \exists\ \lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x-2}{x-1}$$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=?$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\left\{\begin{array}{c}x^2-1=(x-1)(x+1)\\ -x^3+1=-(x-1)\left(x^2+x+1\right)\end{array}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\left(-\left(x^2+x+1\right)\right)-1\cdot(x+1)}{-(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-2x-2}{-(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{5}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1^2+2\cdot 1+2}{\left(1^- -1\right)(1+1)\left(1^2+1+1\right)}=\frac{5}{0^-\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1^2+2\cdot 1+2}{\left(1^+ -1\right)(1+1)\left(1^2+1+1\right)}=\frac{5}{0^+\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\text{No existe límite}$$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{8-x^3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=?$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{8-x^3}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{10}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2^2+2\cdot 2+2}{\left(2-2^-\right)\left(2^2+2\cdot 2+4\right)}=\frac{10}{0^+\cdot 12}=\frac{10}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x+2}{(2-x)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2^2+2\cdot 2+2}{\left(2-2^+\right)\left(2^2+2\cdot 2+4\right)}=\frac{10}{0^-\cdot 12}=\frac{10}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No existe límite}$$

d) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\frac{4}{0}-\frac{6}{0}=?$ Se restan las fracciones y se simplifica el factor común $(x-3)$.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+5}{(x-1)\cdot(x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-1)-(x+5)}{(x-1)\cdot(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{(x-1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-1}=\frac{5}{2}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5}}{x}=\frac{\frac{1}{5+0}-\frac{1}{5}}{0}=\frac{0}{0}=?$ Se ordena la expresión algebraica y se elimina el factor común.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1\cdot 5-1\cdot(5+x)}{(5+x)\cdot 5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(5+x)\cdot 5\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(5+x)\cdot 5}=\frac{-1}{(5+0)\cdot 5}=\frac{-1}{25}$$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{(-2)^2-4}-\frac{1}{-2+2}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$. La indeterminación se resuelve restando las fracciones algebraicas, se obtiene $\frac{k}{0}$ y se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{1-1\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{5}{0}=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{3-(-2)}{(-2^-+2)\cdot(-2-2)}=\frac{5}{0^-\cdot(-4)}=\frac{5}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{3-(-2)}{(-2^++2)\cdot(-2-2)}=\frac{5}{0^+\cdot(-4)}=\frac{5}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}:\text{No}\ \exists\ \lim_{x\to -2}\frac{3-x}{(x+2)\cdot(x-2)}$$

g) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}=\frac{8-8}{\sqrt{8}-\sqrt{8}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener un factor común en numerador y denominador (x – 8), que al simplificarlo elimine la indeterminación.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)}{x-8}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\sqrt{x}+\sqrt{8}\right)=\sqrt{8}+\sqrt{8}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\frac{2^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común (x – 2) en el denominar. En el numerador, el factor (x – 2) se obtiene factorizando el polinomio. Simplificarlo el factor común se elimina la indeterminación.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-2^2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{-(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{-1}=$$

$$=\frac{(2+2)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{-1}=-8\sqrt{2}$$

i) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x+2-\sqrt{2x+3}}=\frac{\sqrt{-1+5}-(-1)-3}{-1+2-\sqrt{2\cdot(-1)+3}}=\frac{0}{0}=?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común (x – 2). Para calcular el conjugado es conveniente separar la parte irracional del resto mediante paréntesis, teniendo en cuenta que si la parte polinómica va como sustraendo (restando), los términos del polinomio cambiaran de signo, debido al signo negativo que precederá al paréntesis.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x+2-\sqrt{2x+3}}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-(x+3)}{(x+2)-\sqrt{2x+3}}=$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x+5}-(x+3)\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left((x+2)-\sqrt{2x+3}\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\left(\left(\sqrt{x+5}\right)^2-(x+3)^2\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left((x+2)^2-\left(\sqrt{2x+3}\right)^2\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(-x^2-5x-4\right)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-(x+4)\cdot(x+1)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)^2\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

Se estudian los límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-(-1+4)\cdot\left(-1+2+\sqrt{2(-1)+3}\right)}{\left(-1^-+1\right)\cdot\left(\sqrt{-1+5}+(-1)+3\right)} = \frac{-6}{0^-\cdot 4} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+4)\cdot\left((x+2)+\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{x+5}+(x+3)\right)} = \frac{-(-1+4)\cdot\left(-1+2+\sqrt{2(-1)+3}\right)}{\left(-1^++1\right)\cdot\left(\sqrt{-1+5}+(-1)+3\right)} = \frac{-6}{0^+\cdot 4} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

No existe límite en $x = -1$.

j) $\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \frac{1-\sqrt{3-2}}{3^2-9} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional $\left(1+\sqrt{x-2}\right)$, buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$ en el numerador. En el denominador, el factor $(x-2)$ se obtiene factorizando el polinomio. Simplificarlo el factor común se elimina la indeterminación.

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{1^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1-(x-2)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+3)\cdot\left(1+\sqrt{x-2}\right)} = \frac{-1}{(3+3)\cdot\left(1+\sqrt{3-2}\right)} = \frac{-1}{12}$$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt{1-0}-1} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2\right)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{(1-x-1)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}+1}{-\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{\sqrt{1-0}+1}{-\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = -1$$

l) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{2\cdot 2+5}-3} = \frac{0}{0} = ?$. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado de las dos expresiones irracionales buscando la expresión notable suma por diferencia que nos permita eliminar raíces y obtener el factor común $(x-2)$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2\right)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+5}\right)^2-3^2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5-9)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x-4)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2} = \left(\dfrac{1-1}{1^2-1}\right)^{1+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)^3 = ?$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)^{x+2} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{1+1}\right)^{1+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

n) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{x+2/x} = (1+2\cdot 0)^{2/0} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\operatorname{Lím}_{x\to x_o}(f(x))^{g(x)} = \left\{\begin{array}{l}\operatorname{Lím}_{x\to x_o} f(x) = 1\\ \operatorname{Lím}_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty\end{array}\right\}^{1^{\pm\infty}} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to x_o}(g(x)\cdot(f(x)-1))}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{x+2/x} \overset{1^{\infty}}{=} e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\cdot(1+2x-1)\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x}\cdot 2x\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}(2(x+2))} = e^{2\cdot(0+2)} = e^4$$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x} = \left(1+0+0^2\right)^{1/0} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot(1+x+x^2-1)\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2}{x}\cdot\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)\cdot x}{x}\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 0}(1+x\cdot)} = e^{1+0} = e$$

o) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{1/x-1} = \left(\dfrac{1+1}{3\cdot 1-1}\right)^{1/1-1} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/x-1} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x+1}{3x-1}-1\right)\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2-2x}{3x-1}\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\frac{-2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(3x-1)}} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\frac{-2}{3x-1}} = e^{-2/2} = e^{-1}$$

p) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{1/x-1} = \left(\dfrac{1^2+1+1}{1+2}\right)^{1/1-1} = 1^{\infty} = ?$. Se resuelve mediante el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{1/x-1} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}-1\right)\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x+2}\right)} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+2)}} = e^{\operatorname{Lím}_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+2)}} = e^{2/3}$$

q) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{4-x^2}\right)^{1/x-2} = \left(\dfrac{1}{4-2^2}\right)^{1/2-2} = \left(\dfrac{1}{0}\right)^{1/0} = \infty^{\infty} = \infty$

10. Sean: $f(x)=\dfrac{3x-3}{5x+5}$ $\quad g(x)=\dfrac{5x}{3x+2}$ $\quad h(x)=\dfrac{x-2}{4x+1}$

calcular:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot(g(x)-h(x))\right]$

b) $\lim\limits_{x\to -1/4}\left(g(x)\cdot h(x)\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot h(x)\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3}f(x)$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot(g(x)-h(x))\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\dfrac{5x}{3x+2}-\dfrac{x-2}{4x+1}\right)\right]$ Se aplican las propiedades de los límites:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\frac{5x}{3x+2}-\frac{x-2}{4x+1}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-3}{5x+5}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{3x+2}-\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{4x+1}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-3}{5x+5}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-3/x}{5+5/x}=\dfrac{3-3/\infty}{5+5/\infty}=\dfrac{3-0}{5+0}=\dfrac{3}{5}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{3x+2}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3+2/x}=\dfrac{5}{3+2/\infty}=\dfrac{5}{3+0}=\dfrac{5}{3}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{4x+1}\overset{\infty/\infty}{\underset{\div x}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2/x}{4+1/x}=\dfrac{1-2/\infty}{4+1/\infty}=\dfrac{1-0}{4+0}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}=\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{20}$$

b) $\lim\limits_{x\to -1/4}\left(g(x)\cdot h(x)\right)=\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{5x}{3x+2}\cdot\lim\limits_{x\to -1/4}\dfrac{x-2}{4x+1}=\dfrac{5\cdot\left(-1/4\right)}{3\left(-1/4\right)+2}\cdot\dfrac{\left(-1/4\right)-2}{4\left(-1/4\right)+1}=-1\cdot\dfrac{-9}{0}=-1\cdot-\infty=+\infty$

En este caso se pueden estudiar los límites laterales, teniendo en cuenta únicamente la h(x).

$$\lim_{x\to -1/4^-}\left(g(x)\cdot h(x)\right)=g\left(\frac{-1}{4}\right)\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-1\cdot\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-\lim_{x\to -1/4^-}h(x)=-\frac{-9}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1/4^+}\left(g(x)\cdot h(x)\right)=g\left(\frac{-1}{4}\right)\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-1\cdot\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-\lim_{x\to -1/4^+}h(x)=-\frac{-9}{0^+}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\cdot h(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x}{3x+2}-\dfrac{x-2}{4x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x+2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{4x+1}=\dfrac{0}{2}-\dfrac{-2}{1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3}f(x)=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-3}{5x+5}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=1$

11. Determinar el valor de "a" para que:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=e^8$$

Solución.

El problema se resuelve calculando el límite en función de a, e igualando a e^8.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}}=\left(\frac{1}{2-1}\right)^{\frac{a}{1-1}}=1^{\frac{a}{0}}=1^{\infty}$$

Se resuelve aplicando el número e.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{a}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}\cdot\left(\frac{x}{2-x}-1\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}\cdot\frac{2x-2}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2a\cdot(x-1)}{(x-1)(2x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2a}{2-x}} = e^{2a}$$

Igualando:

$$e^{2a} = e^{8} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$