CÁLCULO DE PRIMITIVAS

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$p \neq -1 \ \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$a > 0, \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$a > 0, \int \frac{dx}{x \ln a} = \log_a x + C$

$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \cot gx + C$

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arg\,senh} x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg\,cosh} x + C$

$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arg\,tgh} x + C$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si $u = u(x)$, entonces $\int u'(x) f(u(x)) dx$ es inmediata siempre que lo sea $\int f(x) dx$. Por ejemplo, $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$, o bien, $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \operatorname{arcsen} e^x + C$$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

1. - *Cambio de variable*:

Como todo cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Queremos realizar la integral $\int f(x)dx$ donde f no tiene una primitiva inmediata. Debemos buscar un cambio de variable que transforme la integral en una integral inmediata o composición de funciones.

Entonces,

para el cambio, $\boxed{x = g(t)} \rightarrow \boxed{dx = g'(t)dt}$

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt}$$

Más adelante estudiaremos algunos cambios específicos.

---

2. - *Integración por partes*

Se basa en la derivada de un producto.

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ entonces $(uv)' = u'v + uv'$. Integrando en ambos lados de la igualdad obtenemos $uv = \int u'vdx + \int uv'dx$.

Por tanto,

$$\boxed{\int uv'dx = uv - \int u'vdx}$$

Ejemplos:

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{bmatrix} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

---

3. - *Integración de funciones trigonométricas*:

Realización de cambios basados en las identidades trigonométricas:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ &\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Resultan: } \begin{aligned} &\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ &\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \cos x} \qquad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \cos x} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ &\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ &2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) \\ &2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y) \\ &2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\cos(x + y) + \cos(x - y) \end{aligned}$$

Ejemplos:

i) $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right) + C$

ii) $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(6x) + \operatorname{sen}(2x))dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}(-\cos(6x)) + \frac{1}{2}(-\cos(2x))\right) + C$

iii) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx = \int \operatorname{sen}^3 x (\operatorname{sen} x)' dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$

iv) $$\begin{aligned} &\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x (\cos x)' dx = \\ &\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\cos^2 x (\cos x)' dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C \end{aligned}$$

v) $$\begin{aligned} &\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x))dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2(2x))dx = \\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int 1 + \cos(4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C \end{aligned}$$

vi) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x + C$

5. - *Integración de funciones hiperbólicas*:

Son integrales del tipo $\int R(\operatorname{senh} x, \cosh x) dx$ y se resuelven de alguna de las siguientes formas:

1) Teniendo en cuenta la definición: $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2) Teniendo en cuenta las relaciones:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$
$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$
$$\cosh(2x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$$

de donde se deduce: $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1); \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$

Ejemplo:

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{2} \int (\cosh(2x) + 1) dx,$$
$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{4} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx$$

6. - *Integración de funciones irracionales*:

1) Integrales del tipo $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right] dx$

donde $a, b, c, d \in R$ y $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ son funciones irreducibles.

Consideramos el cambio: $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ donde $n = m.c.m.(q_1, \ldots, q_k)$

Ejemplos:

i) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}dx$ como m.c.m.(6,2,3)=6 $\rightarrow$ cambio $t^6 = x$

ii) $\int \sqrt{\frac{2x}{x+1}}dx = \int \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ $\longrightarrow$ cambio $t^2 = \frac{2x}{x+1}$

2) Integrales del tipo:

$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$	$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$
cambio: $x = a\operatorname{sen} t$	cambio: $x = a\operatorname{senh} t$	cambio: $x = a\cosh t$
$dx = a\cos t dt$	$dx = a\cosh t dt$	$dx = a\operatorname{senh} t dt$
queda una trigonométrica.	queda una hiperbólica.	queda una hiperbólica.

Ejemplos:

$$(a)\quad I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t dt \end{bmatrix} = \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt =$$

$$-\cot t - t + C = -\cot(\operatorname{arcsen}(\frac{x}{2})) - \operatorname{arcsen}(\frac{x}{2}) + C$$

$$(b)\quad I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx = \begin{bmatrix} x = \cosh t \\ dx = \operatorname{senh} t dt \end{bmatrix} = \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}\int (\cosh(2t)+1)dt =$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\operatorname{senh}(2t)+t)+C = \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\operatorname{arccos} hx) + \frac{1}{2}\operatorname{arccos} hx + C$$