Examen de Integrales

Se recomienda:

a) Antes de hacer algo, leer todo el examen.

b) Resolver antes las preguntas que se te den mejor.

c) Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.

d) Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.

e) Recuerda mostrar todas las operaciones para conseguir la puntuación completa de cada apartado.

1. Hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x,$ el eje de abscisas y las rectas verticales $\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$

(rep→0.6 p; área→0.6 p)(# 1.2 p)

2. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las siguientes curvas $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2 \\ g(x) = x + 2 \end{cases}$ siendo $0 \le x \le 2.$ Calcular el área del recinto anterior.

(rep→0.8 p; área→0.8 p)(# 1.6 p)

3. Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos

3.1 $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a$ (0.4 p)

3.2 $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3$ (0.4 p)

3.3 $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5$ (0.4 p)(# 1.2 p)

4. Calcular las siguientes integrales indefinidas

4.1 $\int \sqrt[3]{5x^2}\,dx =$ (0.4 p)

4.2 $\int (5\cos x + 3^x)dx =$ (0.8 p)

4.3 $\int (\cos x \sin^3 x)dx =$ (0.7 p)

4.4 $\int (x^3 - 5x + 3)^2(3x^2 - 5)dx =$ (0.6 p)

4.5 $\int x\ln(3x)dx =$ (1.4 p)

4.6 $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx =$ (1.3 p)

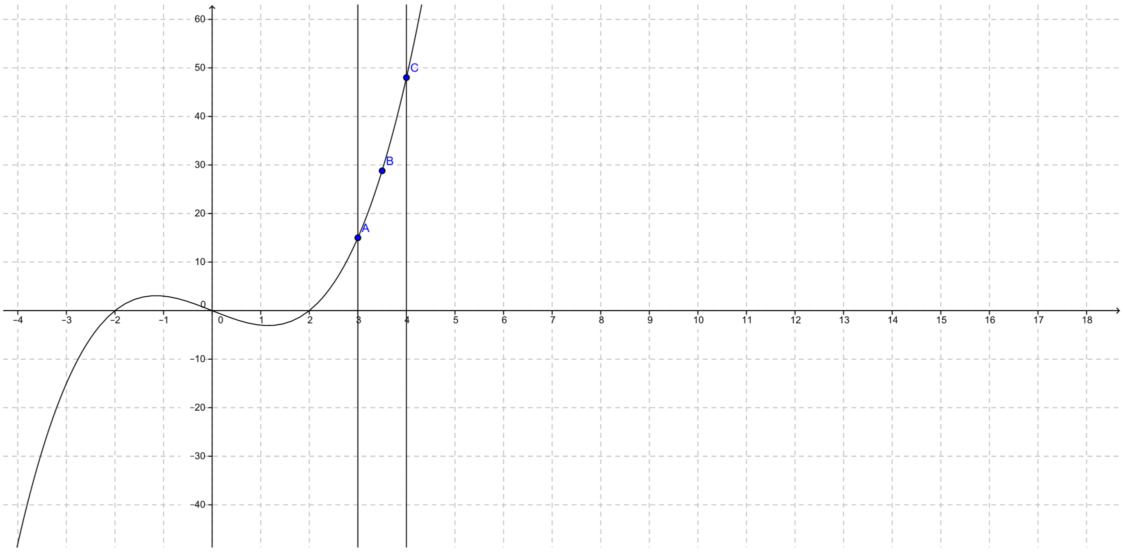
4.7 $\int \frac{8}{1+4x^2}dx =$ (0.8 p)(# 6 p)

SOLUCIÓN

1. Consideramos la tabla de valores siguiente:

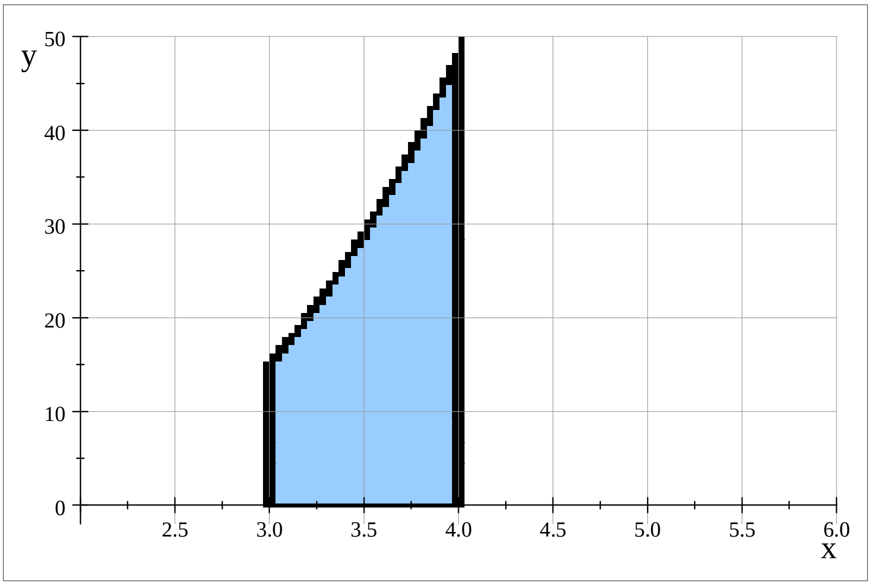
x	3	3.5	4
y	15	28.875	48

Gráficamente tenemos:



Es decir, hemos de calcular el área del recinto:

$x^3 - 4x > y \quad 0 < y \quad x > 3 \quad x < 4$



rep→0.6 p4

Dicha área es $\int_3^4 (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_3^4 = \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^2\right) - \left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^2\right) = \frac{119}{4}$ u^2

área→0.6 p

2. Tenemos que:

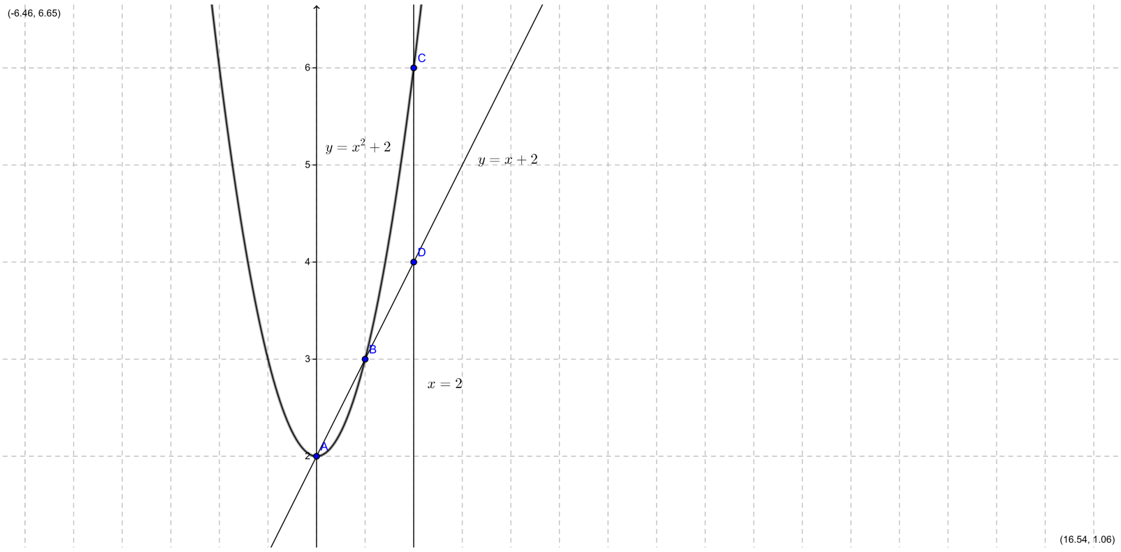
- $f(x) = x^2 + 2$ se trata de la parábola $y = x^2$ con su vértice trasladado al punto $(0, 2)$. Consideramos la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2
y	2	3	6

- $g(x) = x + 2$ se trata de una recta. Consideramos la tabla de valores:

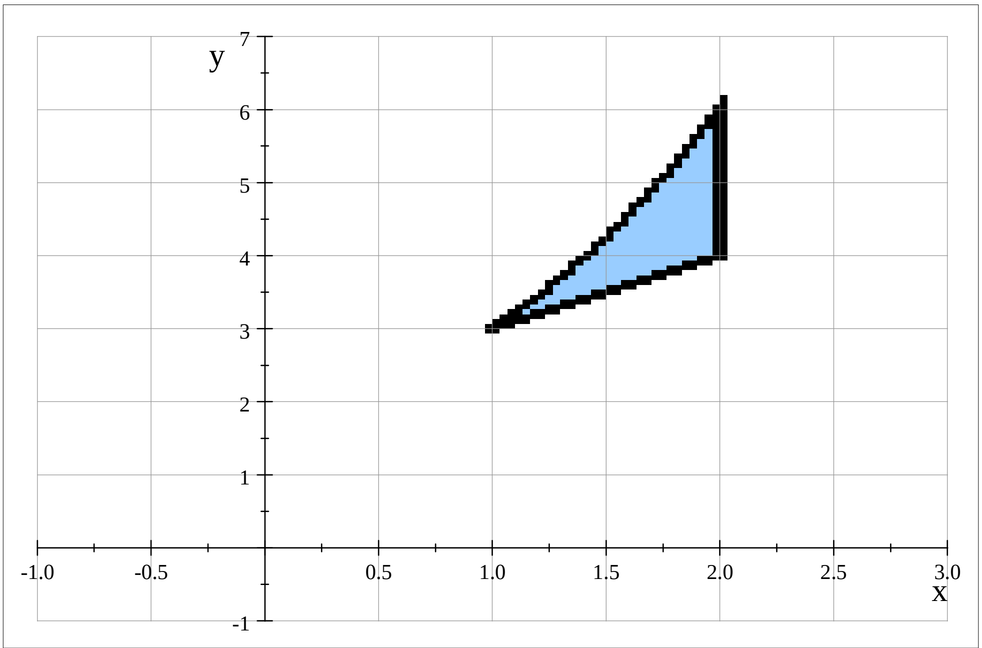
x	0	2
y	2	4

Gráficamente tenemos:



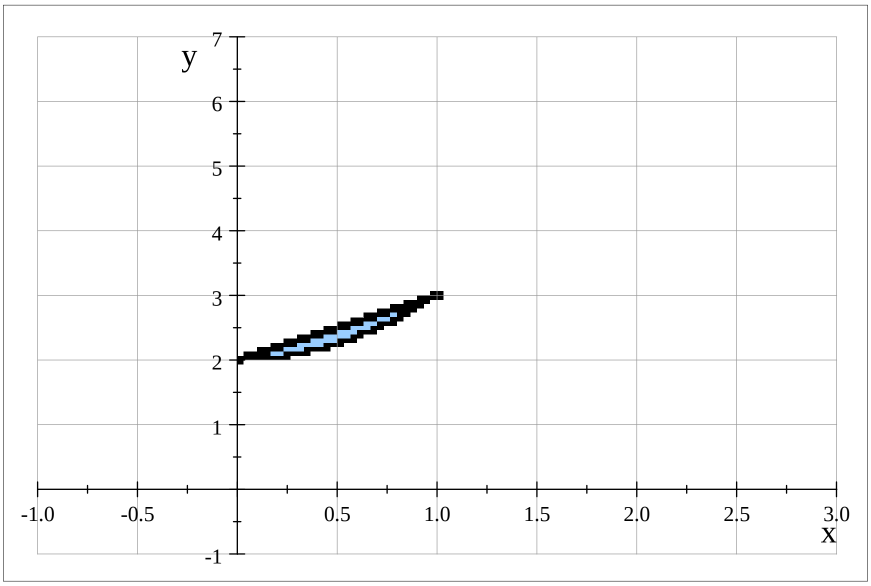
Es decir, hemos de calcular el área del recinto:

$x^2 + 2 > y \quad x + 2 < y \quad x > 1 \quad x < 2$



y del recinto

$x^2 + 2 < y \quad x + 2 > y \quad x > 0 \quad x < 1$



rep→0.8 p

La representación gráfica nos dice que las funciones se cortan en un punto, que para el que hemos de averiguar analíticamente la abscisa, por lo que resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Aplicamos el método de igualación:

$x^2 + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

Un producto es cero si alguno de los multiplicandos es cero: $\begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ 0.2 p

Así el área pedida será:

$$\int_0^1 ((x+2) - (x^2+2))dx + \int_1^2 ((x^2+2) - (x+2))dx = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) = 1 \text{ u}^2$$

área→0.6 p

3.1 $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a \Leftrightarrow [\ln(x+1)]_0^3 = a \Leftrightarrow \ln(3+1) - \ln(0+1) = a \Leftrightarrow \ln 4 - \ln 1 = a \Leftrightarrow \ln 2^2 - 0 = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln 2 = a$ 0.4 p

3.2 $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3 \Leftrightarrow [\ln(x+1)]_0^a = 3 \Leftrightarrow \ln(a+1) - \ln(0+1) = 3 \Leftrightarrow \ln(a+1) - \ln 1 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(a+1) - 0 = 3 \Leftrightarrow \ln(a+1) = 3 \Leftrightarrow a+1 = e^3 \Leftrightarrow a = e^3 - 1$ 0.4 p

3.3 $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5 \Leftrightarrow [\ln(x+a)]_0^3 = 5 \Leftrightarrow \ln(3+a) - \ln(0+a) = 5 \Leftrightarrow \ln(3+a) - \ln a = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3+a}{a}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{3+a}{a} = e^5 \Leftrightarrow 3 + a = ae^5 \Leftrightarrow 3 = ae^5 - a \Leftrightarrow 3 = a(e^5 - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{(e^5-1)} = a$ 0.4 p

4.1 $\int \sqrt[3]{5x^2}\,dx = \int 5x^{\frac{2}{3}}dx = 5\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = 3x^{\frac{5}{3}} + C$ 0.4 p

4.2 $\int (5\cos x + 3^x)dx = 5\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ 0.8 p

4.3 $\int(\cos x \sin^3 x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

También se puede hacer por un cambio de variable: $t = \sin x \to dt = \cos x dx \Leftrightarrow \frac{dt}{\cos x} = dx$

$\int(\cos x \sin^3 x)dx = \int \cos x \cdot t^3 \frac{dt}{\cos x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$ 0.7 p

4.4 $\int(x^3 - 5x + 3)^2(3x^2 - 5)dx = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + C$

También se puede hacer con un cambio de variable:

$t = x^3 - 5x + 3 \to dt = (3x^2 - 5)dx \Leftrightarrow \frac{dt}{(3x^2 - 5)} = dx$

$\int(x^3 - 5x + 3)^2(3x^2 - 5)dx = \int t^2(3x^2 - 5)\frac{dt}{(3x^2 - 5)} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + C$ 0.6 p

4.5 $\int x\ln(3x)dx = [1] =$

Vamos a integrar por partes $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

$$\begin{cases} u = \ln(3x) \\ dv = xdx \end{cases} \to \begin{cases} du = \frac{3}{3x}dx \\ \int dv = \int xdx \end{cases} \to \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$= [1] = \ln(3x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln(3x)}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln(3x)}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$

$= \frac{x^2\ln(3x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$ 1.4 p

4.6 $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = [2] =$

Vamos realizar un cambio de variable: $t = \ln x \to dt = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow xdt = dx$

$= [2] = \int \frac{e^t}{x}xdt = \int e^t dt = e^t + C = e^{\ln x} + C$ 1.3 p

4.7 $\int \frac{8}{1 + 4x^2}dx = 4\int \frac{2}{1 + (2x)^2}dx = 4\arctan 2x + C$

También se puede hacer por cambio de variable: $t = 2x \to dt = 2dx \Leftrightarrow \frac{dt}{2} = dx$

$\int \frac{8}{1 + 4x^2}dx = \int \frac{8}{1 + t^2}\frac{dt}{2} = 4\int \frac{1}{1 + t^2}dt = 4\arctan t + C = 4\arctan 2x + C$ 0.8 p