Ejemplos de derivadas trigonométricas

$$f(x) = sen^3\ 3x$$

$$f'(x) = 3 \cdot sen^2\ 3x \cdot 3 \cdot \cos 3x = 9 \cdot sen^2\ 3x \cdot \cos 3x$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - senx}{1 + senx}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - senx}{1 + senx}}} \cdot \frac{-\cos x\,(1 + senx) - (1 + senx)\cos x}{(1 + senx)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - senx}{1 + senx}}} \cdot \frac{-\cos x - senx \cdot \cos x - \cos x + senx \cdot \cos x}{(1 + senx)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - senx}{1 + senx}}} \cdot \frac{-2\cos x}{(1 + senx)^2} = \frac{-2\cos x}{2\sqrt{\frac{(1 - senx)(1 + senx)^4}{1 + senx}}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{(1 - senx)(1 + senx)^3}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{(1 - senx)(1 + senx)(1 + senx)^2}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{1 - senx} \cdot (1 + senx)} = -\frac{\cos x}{\cos x \cdot (1 + senx)} =$$

$$= -\frac{1}{1 + senx}$$

$f(x) = sen\ 4x$ $\quad$ $f'(x) = 4\cos 4x$

$f(x) = sen\,\frac{1}{2}x$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$

$f(x) = sen\ x^4$ $\quad$ $f'(x) = 4x^3 \cos x^4$

$f(x) = sen^4\ x = (sen\,x)^4$ $\quad$ $f'(x) = 4\,sen^3\ x\ \ \cos x$

$$f(x) = sen^2(\cos 2x)$$

$$f'(x) = 2\,sen(\cos 2x)\cdot\cos(\cos 2x)\cdot(-sen\,2x)\cdot 2$$

$$f(x) = \sqrt[3]{senx}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{sen^2 x}}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{5}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{5}sen\,x$$

$$f(x) = \cos(7-2x)$$

$$f'(x) = -(-2)\cdot sen(7-2x) = 2\cdot sen(7-2x)$$

$$f(x) = \cos\left(3x^2 + x - 1\right)$$

$$f'(x) = -(6x+4)\,sen\left(3x^2 + x - 1\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 5x = \frac{1}{2}(\cos 5x)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos 5x\cdot(-sen\,5x)\cdot 5 = -5\cos 5x\cdot sen\,5x$$

$$f(x) = \cos\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = -\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\,sen\,\frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^2}\cdot sen\,\frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = \cos\left(\cos\left(\cos x\right)\right)$$

$$f'(x) = -sen\left(\cos\left(\cos x\right)\right) \cdot sen\left(\cos x\right) \cdot sen\ x$$

$$f(x) = 3tg2x$$

$$f'(x) = 6\left(1 + tg^2 2x\right)$$

$$f(x) = tg\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = tg\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = tg\left(sen\sqrt{5x}\right)$$

$$f'(x) = \left[1 + tg^2\left(sen\sqrt{5x}\right)\right] \cdot \cos\sqrt{5x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}} \cdot 5$$

$$f(x) = \operatorname{cotg} 4x^2$$

$$f'(x) = -\frac{8x}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{cotg}^2 4X = \left(\operatorname{cotg} 4X\right)^2$$

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot 4 \cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2} = -\frac{8 \cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

$$f(x) = \sec 5x$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 5x}{\cos^2 5x}$$

$$f(x) = \sec(5x+2)$$

$$f'(x) = 5\ tg\,(5x+2)\cdot \sec(5x+2)$$

$$f(x) = \text{cosec}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$f(x) = sen^2(\cos 2x)$$

$$f'(x) = 2\,sen(\cos 2x)\cdot \cos(\cos 2x)\cdot(-sen\,2x)\cdot 2$$

$$f(x) = cotg\,(3-2x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{sen^2(3-2x)}$$

1.-Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

a).- $y(x) = x^2\cos x$ aplicaremos la fórmula para derivar un producto de funciones:

$$\frac{d\,f(x)\,g(x)}{dx} = f(x)\frac{d\ g(x)}{dx} + g(x)\frac{d\ f(x)}{dx} \qquad (B.1)$$ tenemos:

$$\frac{d\,x^2\cos x}{dx} = x^2\,\frac{d\ \cos x}{dx} + \cos x\,\frac{d\,x^2}{dx}$$ pero:

$$\frac{d\ \cos x}{dx} = -sen\,x \quad \frac{d\ x^2}{dx} = 2x$$

por lo tanto: $$\frac{d\,x^2\cos x}{dx} = -x^2 sen\,x + 2x\cos x$$

b).- $y(x) = \dfrac{x^2\cos x}{(2x+1)^3}$ utilizaremos la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\dfrac{d\,f(x)}{dx}-f(x)\dfrac{d\;g(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2} \qquad (B.2)$$

en este caso la $f(x)= x^2 \cos x$ y $g(x)=(2x+1)^3$ pero la hemos obtenido, del ejercicio anterior el valor de $f'(x)$

$$\frac{d\,x^2\cos x}{dx}=-x^2 sen\ x+2x\cos x$$

por lo que solo falta calcular la derivada de *g(x)*

$$\frac{d\,(2x+1)^3}{dx}=3(2x+1)^2\frac{d}{dx}(2x+1)=6(2x+1)^2$$

sustituyendo en la fórmula *(B.2)*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\cos x}{(2x+1)^3}\right)=\frac{(2x+1)^3\left(-x^2 sen\,x+2x\cos x\right)-x^2\cos x\left(6(2x+1)^2\right)}{\left((2x+1)^3\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)^3\left(-x^2 sen\,x+2x\cos x\right)-x^2\cos x\left(6(2x+1)^2\right)}{\left((2x+1)^3\right)^2}=$$

factorizando $(2x+1)^2$ tendremos:

$$y'(x)=\frac{(2x+1)^2\ \left[(2x+1)\left(-x^2 sen\,x+2x\cos x\right)-6x^2\cos x\right]}{(2x+1)^6}=$$

$$=\frac{(2x+1)\left(-x^2 sen\,x+2x\cos x\right)-6x^2\cos x}{(2x+1)^4}=$$

pero

$$(2x+1)\left(-x^2 sen\,x+2x\cos x\right)-6x^2\cos x=-2x^3 sen\,x+2x^2\cos x-x^2 sen\,x$$
$$+2x\cos x-6x^2\cos x=$$
$$=-2x^3 sen\,x-4x^2(\cos x+sen\,x)+2x\cos x$$

por lo tanto:

$$y'(x)=\frac{-2x^3 sen\,x-4x^2(\cos x+sen\,x)+2x\cos x}{(2x+1)^4}$$

c).- $y(x)=\sqrt[5]{(\csc 3x)^{11}}$

$$y(x)=\sqrt[5]{(\csc 3x)^{11}}=(\csc 3x)^{\frac{11}{5}}$$

haciendo $u=\csc 3x$ tenemos:

$y(x)=v^{\frac{11}{5}}$ aplicando la regla de la cadena

$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{du}\frac{du}{dF}$ $(A.3)$ tenemos

$y'(x)=\frac{d}{dx}v^{\frac{11}{5}}=\frac{11}{5}v^{\frac{6}{5}}\frac{d}{dx}v$ pero *v*= csc 3*x* recordando que

$\frac{d\ \csc v}{dx}=-\csc v\, ctg\, v\frac{dv}{dx}$ tenemos

$\frac{d\ \mathbf{csc\,3}x}{dx}=-\mathbf{csc3}x\ ctg\ \mathbf{3}x\frac{d\,\mathbf{3}x}{dx}=-\mathbf{3csc3}x\ ctg\ \mathbf{3}x$ sustituyendo en *y´(x)* tenemos:

$$y'(x)=\frac{d}{dx}v^{\frac{11}{5}}=\frac{11}{5}v^{\frac{6}{5}}\frac{d}{dx}v=\frac{11}{5}(\csc 3x)^{\frac{6}{5}}(-3\csc 3x\ \ ctg\,3x)=$$
$$=\frac{-33}{5}(\csc 3x)^{\frac{11}{5}}ctg\,3x$$

d).- $y(x)=\frac{x\sqrt{2x+1}\cos^2 6x}{5}$

$y(x)=\frac{x\sqrt{2x+1}\cos^2 6x}{5}=\frac{1}{5}x\sqrt{2x+1}\cos^2 6x$ aplicando la fórmula (B.1) tenemos:

$$y'(x)=\frac{1}{5}\left[\sqrt{2x+1}\cos^2 6x\frac{d}{dx}x+x\cos^2 6x\frac{d}{dx}\sqrt{2x+1}+x\sqrt{2x+1}\frac{d}{dx}\cos^2 6x\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}\cos^2 6x+x\cos^2 6x\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2x+1)\right)+\\ x\sqrt{2x+1}\left(2\cos 6x\frac{d}{dx}6x\right)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\sqrt{2x+1}\cos^2 6x+\frac{x\cos^2 6x}{\sqrt{2x+1}}+12x\sqrt{2x+1}\cos 6x\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{(2x+1)\cos^2 6x+x\cos^2 6x+12x(2x+1)\cos 6x}{\sqrt{2x+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{2x\cos^2 6x+\cos^2 6x+x\cos^2 6x+24x^2\cos 6x+12x\cos 6x}{\sqrt{2x+1}}\right]=$$

simplificando tenemos:

$$y'(x)=\frac{1}{5}\left[\frac{2x\cos^2 6x+\cos^2 6x+x\cos^2 6x+24x^2\cos 6x+12x\cos 6x}{\sqrt{2x+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{\cos^2 6x(3x+1)+\cos 6x(24x^2+12x)}{\sqrt{2x+1}}\right]$$

Trigonométricas, operaciones, composición

Seno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{sen}\, f \Rightarrow f'(x) = \cos f \cdot f'}$

f(x) = sen5x $\Rightarrow f(x) = \text{sen}\ 5x \to f = 5x \to f' = 5 \Rightarrow f'(x) = \cos \underbrace{5x}_{f} \cdot \underbrace{5}_{f'} \quad \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos 5x$

Coseno $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \cos f \to f'(x) = -\text{sen}\, f \cdot f'}$

f(x) = cos3x² $\Rightarrow f(x) = \cos 3x^2 \to f = 3x^2 \to f' = 6x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\ \overbrace{3x^2}^{f} \cdot \overbrace{6x}^{f'} \Rightarrow f'(x) = -6x \cdot \text{sen}\ 3x^2$

Tangente $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{tg}\, f \quad \to f'(x) = \left(1 + \text{tg}^2 f\right) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}}$ $\Rightarrow$ Equivalencia $1 + \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Podemos usar cualquiera de las dos.

a) **f(x) = tg7x** $\Rightarrow f(x) = \text{tg}\ 7x \to f = 7x \to f' = 7 \Rightarrow f'(x) = \left(1 + \text{tg}^2 7x\right) \cdot 7 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot \left(1 + \text{tg}^2 7x\right)$

b) **f(x) = tg(4x + 5)** $\Rightarrow f(x) = \text{tg}(4x+5) \to f = 4x + 5 \to f' = 4 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2(4x+5)}$

Arco seno, arco coseno

$$\boxed{f(x) = \text{arc sen}\, f \to f'(x) = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \qquad f(x) = \arccos f \to f'(x) = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}}$$

Se diferencian en el signo de la derivada

f(x) = arc sen x² $\Rightarrow f(x) = \text{arc sen}\, x^2 \to f = x^2 \to f' = 2x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\overbrace{2x}^{f'}}{\sqrt{1 - \underbrace{\left(x^2\right)}_{f}^{2}}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Arco tangente $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{arc tg}\, f \qquad f'(x) = \dfrac{f'}{1+f^2}}$ Importante

$f(x) = \text{arctg}\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow f(x) = \text{arctg}\left(x^2-1\right) \to f = x^2 - 1 \to f' = 2x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\overbrace{2x}^{f'}}{1 + \underbrace{\left(x^2-1\right)}_{f}^{2}} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + \left(x^2-1\right)^2}$$

Producto, cociente y tipo potencial-exponencial

Producto $\Rightarrow \boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$

a) $f(x) = x^5 \cdot \ln x$

$f(x) = \overbrace{x^5}^{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = x^5 \rightarrow f' = 5x^4 \\ g = \ln x \rightarrow g' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \overbrace{5x^4}^{f'}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} + \overbrace{x^5}^{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \Rightarrow f'(x) = 5x^4\cdot\ln x + x^4$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^x$

$f(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \operatorname{sen} x \rightarrow f' = \cos x \\ g = e^x \rightarrow g' = e^x \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^x + \operatorname{sen} x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Cociente $\Rightarrow \boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}}$

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2}$ $\qquad f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = 3x^2 - 2x \rightarrow f' = 6x - 2 \\ g = x^2 + 2 \rightarrow g' = 2x \end{array} \right. \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(6x-2)}^{f'}\overbrace{(x^2+2)}^{g} - \overbrace{(3x^2-2x)}^{f}\overbrace{(2x)}^{g'}}{\underbrace{(x^2+2)}_{g}{}^2} = \frac{6x^3 + 12x - 2x^2 - 4 - (6x^3 - 4x^2)}{(x^2+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 12x - 4}{(x^2+2)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f = \ln x \rightarrow f' = 1/x \\ g = x \rightarrow g' = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(1/x)\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Tipo potencial - exponencial $\Rightarrow \boxed{f^g}$ Una función f elevada a otra función g.
Se resuelven tomando logaritmos neperianos y derivando los dos miembros de la expresión resultante. Escribimos $f(x) = y$ para comprenderlo mejor.

a) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y = x^{\operatorname{sen} x}$

Identificamos f y g $\Rightarrow y = \underbrace{x}_{f}{}^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{g}}$

Tomamos logaritmos $\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x}$ El 2º miembro es el ln de una potencia. Es igual al exponente por el ln de la base. $\Rightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \ln x$

Derivamos $\ln y = \operatorname{sen} x \ln x \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \ln y \rightarrow \dfrac{y'}{y} \\ \operatorname{sen} x \ln x \rightarrow \cos x \ln x + \operatorname{sen} x (1/x) \end{array} \right. \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Despejamos y' $\Rightarrow y' = (\cos x \ln x + (1/x)\operatorname{sen} x)\cdot y \Rightarrow y' = \left(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)x^{\operatorname{sen} x}$

b) $f(x) = x^x \Rightarrow y = x^x$

$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = (\ln x + 1)\cdot y \Rightarrow y' = (\ln x + 1)\cdot x^x \Rightarrow y' = x^x\cdot(\ln x + 1)$

Composición

Encontrar la solución de los siguientes ejercicios

a) $y(t) = \cosh(2t+1)$

Utilizando la fórmula $\dfrac{d\ \cosh v}{dx} = senh\, v\,\dfrac{dv}{dx}$ tenemos:

$$y'(t) = senh(2t+1)\frac{d}{dt}(2t+1) = 2senh(2t+1)$$

b) $y(t) = tgh\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}tgh\left(\frac{\ln t}{t}\right) = \sec h^2\left(\frac{\ln t}{t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t}{t}\right) =$$

$$= \sec h^2\left(\frac{\ln t}{t}\right)\frac{t\dfrac{d}{dt}\ln t - \ln t\dfrac{d}{dt}t}{t^2} =$$

$$= \sec h^2\left(\frac{\ln t}{t}\right)\frac{t\dfrac{1}{t} - \ln t\dfrac{d}{dt}t}{t^2} =$$

$$= \left(\sec h^2\left(\frac{\ln t}{t}\right)\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)$$

2.- Determine las derivadas de las funciones inversas logarítmicas

$$\frac{d\ arc\,tagh\,v}{dx} = \frac{1}{1-v^2}\frac{dv}{dx} \qquad [-1 < v < 1]$$

$$\frac{d\ arc\,tagh(2x)}{dx} = \frac{1|}{1+4x^2}\frac{d\,2x}{dx} = \frac{2}{1+4x^2} \qquad con \qquad [-1 < 2x < 1]$$

b) $\dfrac{d\ arc\,tagh\,v}{dx} = \dfrac{1}{1-v^2}\dfrac{dv}{dx} \qquad [-1 < v < 1]$

$$\frac{d\ arc\cosh(x^2)}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^4-1}}\frac{dx^2}{dx} \qquad \begin{bmatrix} +si & arc\cosh v > 0,\ v > 1 \\ -si & arc\cosh v < 0,\ v > 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\ arc\cosh v}{dx} = \frac{\pm 1}{\sqrt{v^2-1}}\ \frac{dv}{dx} \qquad \begin{bmatrix} +si & arc\cosh v > 0, & v > 1 \\ -si & arc\cosh v < 0, & v > 1 \end{bmatrix}$$

.-Encontrar las derivadas de las siguiente funciones:

a).- $y(x) = \ln\left(x^2 \cos x\right)$

b).- $y(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 \cos x}{(2x+1)^3}\right)$

c).- $y(x) = x^{senx}$

d).- $y(x) = e^{x+1}$

e).- $y(t) = e^{t+1} sen(t)$

a) Solución

$y(x) = \ln(\ x^2 \cos x)$

para la solución de estos problemas ocuparemos las siguientes fórmulas

$$\frac{d\,e^{v(x)}}{dx} = e^{v(x)}\frac{d\,v(x)}{dx} \qquad C.1$$

$$\frac{d\,a^{v(x)}}{dx} = a^{v(x)}\ln a\frac{d\,v(x)}{dx} \qquad C.2$$

$$\frac{d\,u(x)^{v(x)}}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^{v}\ln u\frac{dv}{dx} \qquad C.3$$

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx} \qquad C.4$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d\quad \log_e u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad C.5$$

utilizando C.5 y haciendo $u = x^2 \cos x$ tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

pero $\dfrac{d\,x^2 \cos x}{dx} = -x^2 sen\,x + 2x\cos x$

por lo que

$$\frac{d}{dx}\ln x^2\cos x = \frac{1}{x^2\cos x}\frac{dx^2\cos x}{dx} = \frac{1}{x^2\cos x}(-x^2 sen\,x + 2x\cos x)$$

simplificando

$$\frac{d}{dx}\ln x^2\cos x = -\frac{sen\,x}{\cos x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - tg\,x$$

b) Solución

$$y(x) = \ln\left(\frac{x^2\cos x}{(2x+1)^3}\right)$$

utilizando C.5 y haciendo $u = x^2 \cos x$ tenemos:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad b.1$$

utilizaremos la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\dfrac{d\,f(x)}{dx} - f(x)\dfrac{d\;g(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2} \qquad (B.2)$$

en este caso la $f(x)= x^2 \cos x$ y $g(x)=(2x+1)^3$ pero la hemos obtenido, del ejercicio anterior el valor de $f'(x)$

$$\frac{d\,x^2 \cos x}{dx} = -x^2 sen\,x + 2x \cos x$$

por lo que solo falta calcular la derivada de $g(x)$

$$\frac{d\,(2x+1)^3}{dx} = 3(2x+1)^2\frac{d}{dx}(2x+1) = 6(2x+1)^2$$

sustituyendo en la fórmula *(B.2)*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\cos x}{(2x+1)^3}\right) = \frac{(2x+1)^3\left(-x^2 sen\,x + 2x\cos x\right) - x^2\cos x\left(6(2x+1)^2\right)}{\left((2x+1)^3\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x+1)^3\left(-x^2 sen\,x + 2x\cos x\right) - x^2\cos x\left(6(2x+1)^2\right)}{\left((2x+1)^3\right)^2} =$$

factorizando $(2x+1)^2$ tendremos:

$$y'(x) = \frac{(2x+1)^2\;\left[(2x+1)\left(-x^2 sen\,x + 2x\cos x\right) - 6x^2\cos x\right]}{(2x+1)^6} =$$

$$= \frac{(2x+1)\left(-x^2 sen\,x + 2x\cos x\right) - 6x^2\cos x}{(2x+1)^4} =$$

pero

$$(2x+1)\left(-x^2 sen\,x + 2x\cos x\right) - 6x^2\cos x = -2x^3 sen\,x + 2x^2\cos x - x^2 sen\,x$$
$$+ 2x\cos x - 6x^2\cos x =$$
$$= -2x^3 sen\,x - 4x^2(\cos x + sen\,x) + 2x\cos x$$

por lo tanto:

$y'(x) = \frac{-2x^3 sen\, x - 4x^2(\cos x + sen\, x) + 2x\cos x}{(2x+1)^4}$ finalmente al sustituir en b.1 tenemos:

$$y'(x) = \frac{-2x^3 sen\, x - 4x^2(\cos x + sen\, x) + 2x\cos x}{(2x+1)^4}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{(2x+1)^3}{x^2\cos x}\left(\frac{-2x^3 sen\, x - 4x^2(\cos x + sen\, x) + 2x\cos x}{(2x+1)^4}\right) =$$
$$= \frac{-2x^2 sen\, x - 4x(\cos x + sen\, x) + 2\cos x}{(2x+1)\cos x}$$

c) Solución

$$y(x) = x^{sen x}$$

tomando, en la fórmula C.3, *u*=*x* y *v*=*sen x*

tenemos:

$$\frac{d\, x^{sen x}}{dx} = sen\, x\, x^{sen x - 1}\frac{dx}{dx} + x^{sen x}\ln x \frac{dsen\, x}{dx} =$$
$$= x^{sen x}\left(sen\, x + \ln x \cos x\right)$$

d) Solución

$y(x) = e^{x+1}$

aplicando directamente C.1 tenemos

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}e^{x+1} = e^{x+1}\frac{d}{dx}(x+1) = e^{x+1}$$

e). solución

$y(t) = e^{t+1} sen(t)$

aplicando primeramente la derivada par aun producto de funciones obtenemos:

$$y'(t)=\frac{d}{dt}e^{t+1}sen(t)=e^{t+1}\frac{d}{dt}sen\,t+sen\,t\,\frac{d}{dt}e^{t+1}=$$
$$=e^{t+1}\cos t+sen\,t\;e^{t+1}=e^{t+1}(\cos t+sen\,t\;)$$

2.- Demuestre la fórmula

$$\frac{d\,u(x)^{v(x)}}{dx}=\frac{d\,e^{v(x)\ln u(x)}}{dx}=e^{v\ln u}\frac{d[v\ln u]}{dx}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^{v}\ln u\,\frac{dv}{dx} \qquad C.3$$

Como $\quad u(x)^{v(x)}=\exp\left(\ln u(x)^{v(x)}\right)$

pero de la propiedad: $\ln a^{n}=n\ln a$

entonces

$$u(x)^{v(x)}=e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}$$

derivando tenemos:

$$\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)}=\frac{d}{dx}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v(x)\frac{d\ln u(x)}{dx}+\ln u(x)\frac{dv(x)}{dx}\right)$$

utilizando el hecho de que $e^{v(x)\ln u(x)}=u(x)^{v(x)}$ y la derivada de un logaritmo natural tenemos:

$$\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)}=u(x)^{v(x)}\left(v(x)\left(\frac{1}{u(x)}\frac{d}{dx}u(x)\right)+\ln u(x)\frac{dv(x)}{dx}\right)$$

simplificando, tenemos:

$$\frac{d}{dx}u(x)^{v(x)}=v(x)u(x)^{v(x)-1}\frac{d}{dx}u(x)+u(x)^{v(x)}\ln u(x)\frac{dv(x)}{dx}$$

Composición $\Rightarrow \boxed{[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$

Para no perderse es mejor hacerlo por pasos, simplificando en cada paso. Vemos que tipo de función tenemos que derivar. Iremos siempre desde la estructura mayor
(la que nos encontremos 1º) a la menor o menores. Fíjate en estos ejemplos:

a) $f(x) = \ln(\text{sen}x)$ Logarítmica $f(x) = \ln \overbrace{\text{sen}x}^{f} \to f'(x) = \frac{f'}{f} \to f = \text{sen}x \to f' = \cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}x}$

b) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$ Seno $f(x) = \text{sen}\ \overbrace{\ln x}^{f} \to f'(x) = \cos f \cdot f' \to f = \ln x \to f' = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\cos\ln x$

c) $f(x) = \ln(\ln x^2)$ Solución: $f'(x) = \frac{2}{x\ln x^2}$

1. $f(x) = \ln\overbrace{(\ln x^2)}^{f} \to f'(x) = \frac{f'}{f} \Rightarrow f'(x) = \frac{f'}{\ln x^2}$ .....completamos al final $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}}{\ln x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x\ln x^2}$
2. $f(x) = \ln \underbrace{x^2}_{f} \to f'(x) = \frac{f'}{x^2}$ ....$f'(x) = \frac{2x}{x^2} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} f'(x) = \frac{2}{x}$ esto es f´de 1.
3. $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$ esto es f´de 2. La ponemos en 2.

Completamos .... los puntos anteriores desde el 2 hasta el 1. Ordenando y simplificando.

d) $f(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$ Solución: $f'(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))(\ln(\ln(\ln x)))}$

1. $f(x) = \ln\overbrace{(\ln(\ln(\ln x)))}^{f} \to f'(x) = \frac{f'}{f} \Rightarrow f'(x) = \frac{f'}{\ln(\ln(\ln x))}$.............. completamos al final

...$f'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))}}{\ln(\ln(\ln x))} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))(\ln(\ln(\ln x)))} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))(\ln(\ln(\ln x)))}$

2. $f(x) = \ln\overbrace{(\ln(\ln x))}^{f}$ derivamos $f'(x) = \frac{f'}{\ln(\ln x)}$..........$f'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln(\ln x)} \to f'(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))}$ es f´de 1
3. $f(x) = \ln\overbrace{(\ln x)}^{f}$ derivamos $f'(x) = \frac{f'}{\ln x}$...............$f'(x) = \frac{1/x}{\ln x} \to f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$ esto es f´de 2.
4. $f(x) = \ln x$ derivamos $f'(x) = \frac{1}{x}$ esto es f´de 3. Lo ponemos en 3.

Completamos ....los puntos anteriores desde el 3 hasta el 1, para obtener la derivada. Intentaremos ordenar y simplificar lo mas posible en cada paso.